



ڈاکٹر ذاکر حسین لائبریری

DR ZAKIR HUSAIN LIBRARY

JAMIA MILLIA ISLAMIA
JAMIA NAGAR

NEW DELHI

Please examine the book before
taking it out. You will be res-
ponsible for damages to the book
discovered while returning it.

1454

A. H. Farooqi



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ہندی مخروطات

انٹرمیڈیٹ کے لئے برہنہ جیو میٹرکل کونکس کوک شوٹ اینڈ والٹرز

مترجمہ

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے (پنجاب)

بی۔ اے ایل ایل۔ بی (کیرج) رکن سرگرم ۱۹۱۳ء، فزائیکز بشز (پنجاب)

گورنمنٹ آف انڈیا سکالر کیرج (ریاضیات) ایمنیول ایگز بشز کیرج (ریاضیات)

ایمنیول فونڈیشن سکالر کیرج (ریاضیات)

رکن سرگرم تالیف و ترجمہ

جامعہ عثمانیہ

۱۳۳۸ھ ۱۳۲۹ھ ۱۹۲۰ء

مطبوعہ دارالانشاء علیہ السلام لاہور

یہ کتاب سکین کمپنی کی اجازت سے
میں کو حقوق کاپی رائٹ حاصل ہیں
طبع کی گئی ہے۔

مُقَدِّمہ



دنیا میں ہر قوم کی زندگی میں ایک ایسا زمانہ آتا ہے جب کہ اُس کے قوائے ذہنی میں انحطاط کے آثار نمودار ہونے لگتے ہیں، ایجاد و اختراع اور غور و فکر کا مادہ تقریباً مفقود ہو جاتا ہے، تخیل کی پرواز اور نظر کی جولانی تنگ اور محدود ہو جاتی ہے، علم کا دار و مدار چند رسمی باتوں اور تقلید پر رہ جاتا ہے۔ اُس وقت قوم یا تو بیکار اور مردہ ہو جاتی ہے یا سنبھلنے کے لئے یہ لازم ہوتا ہے کہ وہ دوسری ترقی یافتہ اقوام کا اثر قبول کرے۔ تاریخ عالم کے ہر دور میں اس کی شہادتیں موجود ہیں۔ خود ہمارے دیکھتے دیکھتے جاپان پر یہی گزری اور یہی حالت اب ہندوستان کی ہے۔ جس طرح کوئی شخص دوسرے بنی نوع انسان سے قطع تعلق کر کے تنہا اور الگ تھلک نہیں رہ سکتا اور اگر رہے تو پنپ

نہیں سکتا اسی طرح یہ بھی ممکن نہیں کہ کوئی قوم دیگر اقوام عالم سے بے نیاز ہو کر پھولے پھلے اور ترقی پائے۔ جس طرح ہوا کے جھونکے اور ادنیٰ پرندوں اور کیڑے مکوڑوں کے اثر سے وہ مقامات تک ہرے بھرے رہتے ہیں جہاں انسان کی دسترس نہیں اسی طرح انسانوں اور قوموں کے اثر بھی ایک دوسرے تک اڑ کر پہنچتے ہیں۔ جس طرح یونان کا اثر روم اور دیگر اقوام یورپ پر پڑا جس طرح عرب نے عجم کو اور عجم نے عرب کو اپنا فیض پہنچایا جس طرح اسلام نے یورپ میں تاریکی اور جہالت کو مٹا کر علم کی روشنی پہنچائی اسی طرح آج ہم بھی بہت سی باتوں میں مغرب کے محتاج ہیں۔ یہ قانون عالم ہے جو یوں ہی جاری رہا اور جاری رہیگا۔

”دن سے دیا یوں ہی جلتا رہا ہے“

جب کسی قوم کی نوبت یہاں تک پہنچ جاتی ہے اور وہ آگے قدم بڑھانے کی سعی کرتی ہے تو ادبیات کے میدان میں پہلی منزل ترجمہ ہوتی ہے۔ اس لئے کہ جب قوم میں جدت اور بھیج نہیں رہی تو ظاہر ہے کہ اس کی تصانیف معمولی ادھوری کم مایہ اور ادنیٰ ہوں گی۔ اُس وقت قوم کی بڑی خدمت یہی ہے کہ ترجمہ کے ذریعہ سے دنیا کی اعلیٰ درجہ کی تصانیف اپنی زبان میں لائی جائیں۔ یہی ترجمے خیالات میں تغیر اور معلومات میں اضافہ کہیں گے، جمود کو توڑیں گے اور قوم میں ایک نئی حرکت پیدا کہیں گے اور پھر آخر یہی ترجمے تصنیف و تالیف

کے جدید اسلوب اور ڈسٹنگ سبھائیں گے۔ ایسے وقت میں ترجمہ تصنیف سے زیادہ قابل قدر زیادہ مفید اور زیادہ فیض رساں ہوتا ہے۔

اسی اصول کی بنا پر جب عثمانیہ یونیورسٹی کی تجویز پیش ہوئی تو ہر اکڑ الٹ ڈائینس رستم دوراں ارسطوئے زماں سے سالار آصف جاہ مظفر الممالک نظام الملک نظام الدولہ **نَوَابِ مِيرِ عُمَانِ عَلِيخان بہادر فتح جنگ** جی۔سی۔اس۔آئی۔جی۔سی۔بی۔ای۔والی حیدرآباد دکن خلد اللہ ملکہ و سلطنت نے جن کی علمی قدر دانی اور علمی سرپرستی اس زمانہ میں ایسے علوم کے حق میں آب حیات کا کام کر رہی ہے، یہ تقاضائے مصلحت و دور بینی سب سے اول سرشتہ تالیف و ترجمہ کے قیام کی منظوری عطا فرمائی جو نہ صرف یونیورسٹی کے لئے نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کریگا بلکہ ملک میں نشر و اشاعت علوم و فنون کا کام بھی انجام دیگا۔ اگرچہ اس سے قبل بھی یہ کام ہندوستان کے مختلف مقامات میں تھوڑا تھوڑا انجام پایا مثلاً فورٹ ولیم کالج کلکتہ میں زیر نگرانی ڈاکٹر گلکرسٹ، دہلی سوسائٹی میں، انجمن پنجاب میں زیر نگرانی ڈاکٹر لائٹنر و کرنل ہارلاند، علی گڑھ سائنٹفک انسٹیٹیوٹ میں جس کی بنا سرسید احمد خاں مرحوم نے ڈالی۔ مگر یہ کوششیں سب وقتی اور عارضی تھیں۔ نہ اُنکے پاس کافی سرمایہ اور سامان تھا نہ انہیں یہ موقع حاصل تھا

اور نہ انہیں **اَعْلٰی حَضَرَتِ وَاَفْلَاسِ** جیسے علم پرور
فرمانروا کی سرپرستی کا شرف حاصل تھا۔ یہ پہلا وقت ہے کہ
اردو زبان کو علوم و فنون سے مالا مال کرنے کے لئے باقاعدہ
اور مستقل کوشش کی گئی ہے۔ اور یہ پہلا وقت ہے کہ
اردو زبان کو یہ رتبہ ملا ہے کہ وہ اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار
پائی ہے۔ احیائے علوم کے لئے جو کام آگسٹس نے روم میں،
خلافت عباسیہ میں ہارون الرشید و مامون الرشید نے ہسپانیہ میں
عبدالرحمن ثالث نے، بکراجیت و اکبر نے ہندوستان میں،
الفرڈ نے انگلستان میں، پیٹر اعظم و کیتھرائن نے روس میں
اور مت شی ہٹو نے جاپان میں کیا، وہی فرمانروائے دولت
اَصْفِیَہ نے اس ملک کے لئے کیا۔ **اَعْلٰی حَضَرَتِ وَاَفْلَاسِ**
کا یہ کارنامہ ہندوستان کی علمی تاریخ میں ہمیشہ فخر و مباہات
کے ساتھ ذکر کیا جائیگا۔

منجملہ اُن اسباب کے جو قومی ترقی کا موجب ہوتے ہیں ایک
بڑا سبب زبان کی تکمیل ہے۔ جس قدر جو قوم زیادہ ترقی یافتہ
ہے اُسی قدر اُس کی زبان وسیع اور اس میں نازک خیالات
اور علمی مطالب کے ادا کرنے کی زیادہ صلاحیت ہوتی ہے،
اور جس قدر جس قوم کی زبان محدود ہوتی ہے اُسی قدر تنزیم
و شایستگی بلکہ انسانیت میں اس کا درجہ کم ہوتا ہے۔ چنانچہ
وحشی اقوام میں الفاظ کا ذخیرہ بہت ہی کم پایا گیا ہے۔ علمائے
فلسفہ و علم اللسان نے یہ ثابت کیا ہے کہ زبان، خیال اور

خیال، زبان ہے اور ایک مدت کے بعد اس نتیجے پر پہنچے ہیں کہ انسانی دماغ کے صحیح تاریخی ارتقا کا علم، زبان کی تاریخ کے مطالعہ سے حاصل ہو سکتا ہے۔ الفاظ ہمیں سوچنے میں ویسی ہی مدد دیتے ہیں جیسی آنکھیں دیکھنے میں۔ اس لئے زبان کی ترقی درحقیقت عقل کی ترقی ہے۔

علم ادب اسی قدر وسیع ہے جس قدر حیات انسانی۔ اور اس کا اثر زندگی کے ہر شعبہ پر پڑتا ہے۔ وہ نہ صرف انسان کی ذہنی، معاشرتی، سیاسی ترقی میں مدد دیتا، اور نظر میں سماعت، دماغ میں روشنی، دلوں میں حرکت اور خیالات میں تغیر پیدا کرتا ہے بلکہ قوموں کے بنانے میں ایک قوی آلہ ہے۔ قومیت کے لئے ہم خیالی شرط ہے اور ہم خیالی کے لئے ہم زبانی لازم۔ گویا ایک زبانی قومیت کا شیرازہ ہے جو اسے منتشر ہونے سے بچائے رکھتا ہے۔ ایک زمانہ تھا جب کہ مسلمان اقطاع عالم میں پھیلے ہوئے تھے لیکن اُن کے علم ادب اور زبان نے انہیں ہر جگہ ایک کر رکھا تھا۔ اس زمانے میں انگریز ایک دنیا پر چھائے ہوئے ہیں لیکن بادیجود بید مسافت و اختلاف مالا یک زبانی کی بدولت قومیت کے ایک سلسلے میں منسلک ہیں، زبان میں جادو کا سا اثر ہے اور صرف افراد ہی پر نہیں بلکہ اقوام پر بھی اُس کا وہی تسلط ہے۔

یہی وجہ ہے کہ تعلیم کا صحیح اور فطرتی ذریعہ اپنی ہی زبان ہو سکتی ہے۔ اس امر کو اعلیٰ حضرت و اقل س نے

پہچانا اور جامعہ عثمانیہ کی بنیاد ڈالی۔ جامعہ عثمانیہ ہندوستان میں پہلی یونیورسٹی ہے جس میں ابتدا سے انتہا تک ذریعہ تعلیم ایک دیسی زبان ہوگا۔ اور یہ زبان اردو ہوگی۔ ایک ایسے ملک میں جہاں ”ہانت بہانت کی بولیاں“ بولی جاتی ہیں، جہاں ہر صوبہ ایک نیا عالم ہے، صرف اردو ہی ایک عام اور مشترک زبان ہو سکتی ہے۔ یہ اہل ہند کے میل جول سے پیدا ہوئی اور اب بھی یہی اس فرض کو انجام دیگی۔ یہ اس کے خمیر اور وضع و ترکیب میں ہے۔ اس لئے یہی تعلیم اور تبادلہ خیالات کا واسطہ بن سکتی اور قومی زبان کا دعوئے کر سکتی ہے۔

جب تعلیم کا ذریعہ اردو قرار دیا گیا تو یہ کھلا اعتراض تھا کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کتابوں کا ذخیرہ کہاں ہے اور ساتھ ہی یہ بھی کہا جاتا تھا کہ اردو میں یہ صلاحیت ہی نہیں کہ اس میں علوم و فنون کی اعلیٰ تعلیم ہو سکے۔ یہ صمیم ہے کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کافی ذخیرہ نہیں۔ اور اردو ہی پر کیا منحصر ہے، ہندوستان کی کسی زبان میں بھی نہیں۔ یہ طلب و رسد کا عام مسئلہ ہے۔ جب مانگ ہی نہ تھی تو رسد کہاں سے آتی۔ جب ضرورت ہی نہ تھی تو کتابیں کیونکر مینا ہوتیں۔ ہماری اعلیٰ تعلیم غیر زبان میں ہوتی تھی، تو علوم و فنون کا ذخیرہ ہماری زبان میں کہاں سے آتا۔ ضرورت ایجاد کی مان ہے۔ اب ضرورت محسوس ہوئی ہے تو کتابیں بھی

میتا ہو جائیں گی۔ اسی کمی کو پورا کرنے اور اسی ضرورت کو رفع کرنے کے لئے سررشتہ تالیف و ترجمہ قائم کیا گیا۔ یہ صحیح نہیں ہے کہ اردو زبان میں اس کی صلاحیت نہیں۔ اس کے لئے کسی دلیل و برہان کی ضرورت نہیں۔ سررشتہ تالیف و ترجمہ کا وجود اس کا شافی جواب ہے۔ یہ سررشتہ ہی کام کر رہا ہے۔ کتابیں تالیف و ترجمہ ہو رہی ہیں اور چند روز میں عثمانیہ یونیورسٹی کالج کے طالب علموں کے ہاتھوں میں ہونگی اور رفتہ رفتہ عام شائقین علم تک پہنچ جائیں گی۔

لیکن اس میں سب سے کٹھن اور سنگلاخ مرحلہ وضع اصطلاحات کا تھا۔ اس میں بہت کچھ اختلاف اور بحث کی گنجائش ہے۔ اس بارے میں ایک مدت کے تجربہ اور کامل غور و فکر اور مشورہ کے بعد میری یہ رائے قرار پائی ہے کہ تنہا نہ تو ماہر علم صحیح طور سے اصطلاحات وضع کر سکتا ہے اور نہ ماہر لسان۔ ایک کو دوسرے کی ضرورت ہے۔ اور ایک کی کمی دوسرا پورا کرتا ہے۔ اس لئے اس اہم کام کو صحیح طور سے انجام دینے کے لئے یہ ضروری ہے کہ دونوں یک جا جمع کئے جائیں تاکہ وہ ایک دوسرے کے مشورہ اور مدد سے ایسی اصطلاحیں بنائیں جو نہ اہل علم کو ناگوار ہوں نہ اہل زبان کو۔ چنانچہ اسی اصول پر ہم نے وضع اصطلاحات کے لئے ایک ایسی مجلس بنائی جس میں دونوں جماعتوں کے اصحاب شریک ہیں۔ علاوہ ان کے

ہم نے اُن اہل علم سے بھی مشورہ کیا جو اس کی خاص اہلیت رکھتے ہیں اور بُعد مسافت کی وجہ سے ہماری مجلس میں شریک نہیں ہو سکتے۔ اس میں شک نہیں کہ بعض الفاظ غیر مانوس معلوم ہوں گے اور اہل زبان انہیں دیکھ کر ناک بہوں چڑھائیں گے۔ لیکن اس سے گزیر نہیں۔ ہیں بعض ایسے علوم سے واسطہ ہے جن کی ہوا تک ہماری زبان کو نہیں لگی۔ ایسی صورت میں سوائے اس کے چارہ نہیں کہ جب ہماری زبان کے موجودہ الفاظ خاص خاص مفہوم کے ادا کرنے سے قاصر ہوں تو ہم جدید الفاظ وضع کریں۔ لیکن اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ ہم نے محض ٹالنے کے لئے زبردستی الفاظ گھڑ کر رکھ دئے ہیں بلکہ جس نہج پر اب تک الفاظ بنتے چلے آئے ہیں اور جن اصول ترکیب و اشتقاق پر اب تک ہماری زبان کاربند رہی ہے، اس کی پوری پابندی ہم نے کی ہے۔ ہم نے اُس وقت تک کسی لفظ کے بنانے کی جرأت نہیں کی جب تک اُسی قسم کی متعدد مثالیں ہمارے پیش نظر نہ رہی ہوں۔ ہماری رائے میں جدید الفاظ کے وضع کرنے کی اس سے بہتر اور صحیح کوئی صورت نہیں۔ اب اگر کوئی لفظ غیر مانوس یا اجنبی معلوم ہو تو اس میں ہمارا قصور نہیں۔ جو زبان زیادہ تر شعر و شاعری اور قصص تک محدود ہو، وہاں ایسا ہونا کچھ تعجب کی بات نہیں۔ جس ملک سے ایجاد و اختراع کا مادہ سلب ہو گیا ہو جہاں لوگ نئی چیزوں کے بنانے اور دیکھنے کے عادی نہ ہوں، وہاں جدید الفاظ کا

غیر مانوس اور اجنبی معلوم ہونا موجب حیرت نہیں۔ الفاظ کی حالت بھی انسانوں کی سی ہے۔ اجنبی شخص بھی رفتہ رفتہ مانوس ہو جاتے ہیں۔ اول اول الفاظ کا بھی یہی حال ہے۔ استعمال آہستہ آہستہ غیر مانوس کو مانوس کر دیتا ہے اور صحت و غیر صحت کا فیصلہ زمانہ کے ہاتھ میں ہوتا ہے۔ ہمارا فرض یہ ہے کہ لفظ تجویز کرتے وقت ہر پہلو پر کامل غور کر لیں، آئندہ چل کر اگر وہ استعمال اور زمانہ کی کسوٹی پر پورا اترتا تو خود ٹکسالی ہو جائیگا اور اپنی جگہ آپ پیدا کر لیگا۔ علاوہ اس کے جو الفاظ پیش کئے گئے ہیں وہ الہامی نہیں کہ جن میں رد و بدل نہ ہو سکے بلکہ **فرہنگ اصطلاحات عثمانیہ** جو زیر ترتیب ہے پہلے اس کا مسودہ اہل علم کی خدمت میں پیش کیا جائے گا اور جہاں تک ممکن ہوگا اس کی اصلاح میں کوئی دقیقہ فرو گذاشت نہیں کیا جائے گا۔

لیکن ہماری مشکلات صرف اصطلاحات علمیہ تک ہی محدود نہیں ہیں۔ ہمیں ایک ایسی زبان سے ترجمہ کرنا پڑتا ہے جو ہمارے لئے بالکل اجنبی ہے، اس میں اور ہماری زبان میں کسی قسم کا کوئی رشتہ یا تعلق نہیں۔ اس کا طرز بیان، ادائے مطلب کے اسلوب، محاورات وغیرہ بالکل جدا ہیں۔ جو الفاظ اور جملے انگریزی زبان میں بالکل معمولی اور روزمرہ کے استعمال میں آتے ہیں، اُن کا ترجمہ جب ہم اپنی زبان میں کرنے بیٹھتے ہیں تو سخت دشواری پیش آتی ہے۔ ان تمام دشواریوں پر

غالب آنے کے لئے مترجم کو کیسا کچھ خونِ جگر کھانا نہیں پڑتا۔ ترجمہ کا کام جیسا کہ عموماً خیال کیا جاتا ہے، کچھ آسان کام نہیں ہے۔ بہت خاک چھانی پڑتی ہے تب کہیں گوہر مقصود ہاتھ آتا ہے۔ اس سرشت کا کام صرف یہی نہ ہوگا اگرچہ یہ اس کا فرضِ اولین ہے، کہ وہ نصابِ تعلیم کی کتابیں تیار کرے، بلکہ اس کے علاوہ وہ ہر علم پر متعدد اور کثرت سے کتابیں تالیف و ترجمہ کرائے گا، تاکہ لوگوں میں علم کا شوق بڑھے، ملک میں روشنی پھیلے، خیالات و قلوب پر اثر پیدا ہو، جمالت کا استیصال ہو۔ جمالت کے معنی اب لاعلمی ہی کے نہیں بلکہ اس میں افلاس، کم ہمتی، تنگ دلی، کوتاہ فہمی، بے غیرتی، بد اخلاقی سب کچھ آجاتا ہے۔ جمالت کا مقابلہ کر کے اسے پس پا کرنا سب سے بڑا کام ہے۔ انسانی دماغ کی ترقی علم کی ترقی ہے۔ انسانی ترقی کی تاریخ علم کی اشاعت و ترقی کی تاریخ ہے۔ ابتدائے آفرینش سے اس وقت تک انسان نے جو کچھ کیا ہے، اگر اس پر ایک دسویں نظر ڈالی جائے تو نتیجہ یہ نکلے گا کہ جوں جوں علم میں اضافہ ہوتا گیا، پچھلی غلطیوں کی صحت ہوتی گئی، تاریکی گھٹتی گئی، روشنی بڑھتی گئی، انسان میدانِ ترقی میں قدم آگے بڑھاتا گیا۔ اسی مقدس فرض کے ادا کرنے کے لئے یہ سرشت قائم کیا گیا ہے اور وہ اپنی بساط کے موافق اس کے انجام دینے میں کوتاہی نہ کرے گا۔

لیکن غلطی، تحقیق و جستجو کی گھات میں لگی رہتی ہے۔ ادب کا

کامل ذوق سلیم ہر ایک کو نصیب نہیں ہوتا۔ بڑے بڑے نقاد اور مبصر فاش غلطیاں کر جاتے ہیں۔ لیکن اس سے ان کے کام پر حرف نہیں آتا۔ غلطی ترقی کے مانع نہیں ہے، بلکہ وہ صحت کی طرف رہتائی کرتی ہے۔ پچھلوں کی بھول چوک آنے والے مسافر کو رستہ بھٹکنے سے بچا دیتی ہے۔ ایک جاپانی ماہر تعلیم (یرن کی کوچی) نے اپنے ملک کا تعلیمی حال لکھتے ہوئے اس صحیح کیفیت کا ذکر کیا ہے جو ہونہار اور ترقی کرنے والے افراد اور اقوام پر مگرزرتی ہے۔

”ہم نے بہت سے تجربے کئے اور بہت سی ناکامیاں اور غلطیاں ہوئیں، لیکن ہم نے ان سے نئے سبق سیکھے اور فائدہ اٹھایا۔ رفتہ رفتہ ہیں اپنے ملک کی تعلیمی ضروریات اور امکانات کا صحیح اور بہتر علم ہوتا گیا اور ایسے تعلیمی طریقے معلوم ہوتے گئے جو ہمارے اہل وطن کے لئے زیادہ موزوں تھے۔ ابھی بہت سے ایسے مسائل ہیں جو ہمیں حل کرنے میں ’بہت سی ایسی اصلاحیں ہیں جو ہمیں عمل میں لانی ہیں‘ ہم نے اب تک کوشش کی اور ابھی کوشش کر رہے ہیں اور مختلف طریقوں کی برائیاں اور بھلائیاں دریافت کرنے کے درپے ہیں، تاکہ اپنے ملک کے فائدے کے لئے اچھی باتوں کو اختیار کریں اور رواج دیں اور برائیوں سے بچیں۔“ اس لئے جو حضرات ہمارے کام پر تنقیدی نظر ڈالیں انہیں وقت کی تنگی، کام کا ہجوم اور اس کی اہمیت اور ہماری مشکلات پیش نظر رکھنی چاہئیں۔ یہ پہلی سعی ہے اور پہلی سعی میں کچھ نہ کچھ خامیاں

ضرور رہ جاتی ہیں، لیکن آگے چل کر یہی خامیاں ہماری رہنما بنیں گی اور پختگی اور اصلاح تک پہنچائیں گی۔ یہ نقش اول ہے، نقش ثانی اس سے بہتر ہوگا۔ ضرورت کا احساس علم کا شوق، حقیقت کی لگن، صحت کی 'نوہ' جد و جہد کی رسائی خود بخود ترقی کے مارج طے کر لے گی۔

جاپانی بڑے فخر سے یہ کہتے ہیں کہ ہم نے تیس چالیس سال کے عرصے میں وہ کچھ کر دکھایا جس کے انجام دینے میں یورپ کو اتنی ہی صدیاں صرف کرنی پڑیں۔ کیا کوئی دن ایسا آئے گا کہ ہم بھی یہ کہنے کے قابل ہوں گے؟ ہم نے پہلی شرط پوری کر دی ہے یعنی بیجا قیود سے آزاد ہو کر اپنی زبان کو اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار دیا ہے۔ لوگ ابھی ہمارے کام کو تذبذب کی نگاہ سے دیکھ رہے ہیں اور ہماری زبان کی قابلیت کی طرف متنبہ نظریں ڈال رہے ہیں۔ لیکن وہ دن آنے والا ہے کہ اس ذرے کا بھی ستارہ بن جائے گا، یہ زبان علم و حکمت سے مالا مال ہوگی اور

اَعْلَىٰ حَضْرَتِ وَاَفْکَلَسْ کی نظر کیا اثر کی بدولت یہ دنیا کی مہذب و شایستہ زبانوں کی ہمسری کا دعوے کرے گی۔ اگرچہ اُس وقت ہماری سعی اور محنت خیر معلوم ہوگی، مگر یہی شامِ غربت صبحِ وطن کی آمد کی خبر دے رہی ہے، یہی شبِ بیدار روزِ روشن کا جلوہ دکھائیں گی، اور یہی مشقت اُس قصرِ رفیع الشان کی بنیاد ہوگی جو آئندہ تعمیر ہونے والا ہے۔ اس وقت ہمارا کام صبر و استقلال سے میدان صاف کرنا،

داغ بیل ڈالنا اور نیو کھودنا ہے، اور فرہاد وار شیریں حکمت کی خاطر سنگدلخ پہاڑوں کو کھود کھود کر جوئے علم لانے کی سعی کرتا ہے۔ اور گو ہم نہ ہوں گے مگر ایک زمانہ آئیگا جب کہ اس میں علم و حکمت کے دریا بہیں گے اور ادبیات کی افتادہ زمین سرسبز و شاداب نظر آئے گی۔

آخر میں میں سررشتہ کے مترجمین کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنہوں نے اپنے فرض کو بڑی مستعدی اور شوق سے انجام دیا۔ نیز میں ارکان مجلس وضع اصطلاحات کا شکر گزار ہوں کہ ان کے مفید مشورے اور تحقیق کی مدد سے یہ مشکل کام بخوبی انجام پا رہا ہے۔ لیکن خصوصیت کے ساتھ یہ سررشتہ جناب مسٹر محمد اکبر حیدری بی۔ اے معتمد عدالت و تعلیمات و کوٹوالی و امور عامہ سرکار عالی کا ممنون ہے جنہیں ابتدا سے قیام و انتظام جامعہ عثمانیہ میں خاص انعام رہا ہے۔ اور اگر ان کی توجہ اور امداد ہمارے شریک حال نہ ہوتی تو یہ عظیم الشان کام صورت پذیر نہ ہوتا۔ میں سید اس مسعود صاحب بی۔ اے (آکسن) آئی۔ ای۔ ایس۔ ناظم تعلیمات سرکار عالی کا بھی شکریہ ادا کرتا ہوں کہ ان کی توجہ اور عنایت ہمارے حال پر مبذول رہی اور ضرورت کے وقت ہمیشہ بلا تکلف خوشی کے ساتھ ہمیں مدد دی۔

عبدالحق

ناظم سررشتہء تالیف و ترجمہ (عثمانیہ یونیورسٹی)

اَرْكَانُ الْاَلْبَانِيَّةِ



- مولوی عبدالحق صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ ناظم۔
- قاضی محمد حسین صاحب۔ ایم۔ اے۔ ریگدر۔۔۔۔۔ مترجم ریاضیات
- چودھری برکت علی صاحب بی۔ یس۔ سی۔۔۔۔۔ مترجم سائنس
- مولوی سید ہاشمی صاحب۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ مترجم تاریخ۔
- مولوی محمد الیاس صاحب برنی ایم۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم معاشیات
- قاضی تلمذ حسین صاحب ایم۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم سیاسیات
- مولوی ظفر علی خاں صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم تاریخ۔
- مولوی عبد الماجد صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم فلسفہ و منطق
- مولوی عبد الحکیم صاحب شرر۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ مولف تاریخ اسلام
- مولوی سید علی رضا صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم قانون۔
- مولوی عبداللہ العماوی صاحب۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ مترجم کتب عربی
- علاوہ ان مذکورہ بالا مترجمین کے مولوی حاجی
- صفی الدین صاحب ترجمہ شدہ کتابوں کو مذہبی نقطہ نظر
- سے دیکھنے کے لئے اور نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب
- طبا طبائی) ترجموں پر نظر ثانی کرنے کے لئے مقرر فرمائے گئے ہیں۔

ارکان مجلس و تنظیمات

مولوی مرزا مہدی خاں صاحب کوکب وظیفہ یاب کٹر عالی (سابق ناظم مریم شاہی)
 مولوی حمید الدین صاحب بی۔ اے صدر دارالعلوم
 نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طباطبائی)
 مولوی حمید الدین صاحب سلیم
 مولوی عبدالحق بی۔ اے ناظم سرشتہ تالیف و ترجمہ

علاوہ ان مستقل ارکان کے، مترجمین سرشتہ تالیف و ترجمہ نیز
 دوسرے اصحاب سے بلحاظ اُنکے فن کے مشورہ کیا گیا۔ مثلاً
 خان فضل محمد خان صاحب ایم۔ اے ریگر (پرنسپل ٹی ہائی اسکول حیدرآباد)
 مولوی عبد الواسع صاحب (پروفیسر دارالعلوم حیدرآباد)
 پروفیسر عبدالرحمن صاحب بی۔ ایس۔ سی (نظام کالج)
 مرزا محمد ہادی صاحب بی۔ اے (پروفیسر کرپن کالج لکھنؤ)

مولوی سلیمان صاحب ندوی

سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (ناظم تعلیمات حیدرآباد) وغیرہ

فہرست مضامین

صفحہ	مضمون
۱	قطع مکانی یا شلجی
۴۱	قائم تظیل
۵۱	قطع ناقص یا بیضی
۱۱۶	قطع زائد یا ہڈولی
۱۸۰	قائم ہڈولی
۱۸۲	اسطوانہ اور مخروط
۲۱۱	چند ضروری مسائل
۲۱۷	عملیات
۳۴۸	ضمیمہ

ہندسہ فی الجبر

قطع مکانی یا شلجہ

تعریف۔ اگر ایک نقطہ (ن) کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ (س) سے ہمیشہ برابر ہو اُس عمودی فاصلہ (ن م) کے جو نقطہ (ن) اور ایک ثابت مستقیم خط (لام) کے درمیان ہے تو ن کے طریق کو [یعنی اُس خط کو جس پر کہ (ن) ان شرائط کے ماتحت حرکت کر سکتا ہے] قطع مکانی (یا شلجہ) کہتے ہیں۔

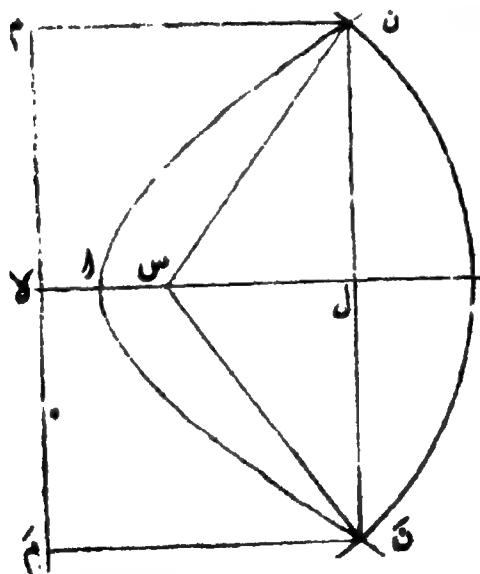
(س ن = ن م)

- ۲۔ ثابت نقطہ (س) کو ماسکہ کہتے ہیں۔
 - ۳۔ ثابت مستقیم خط (لام) کو مرتب کہتے ہیں
- تعریف۔ خط مغنی باحاطہ ایک خط مستقیم کے متشکل اُس وقت ہوتا ہے جبکہ مغنی کے کسی ایک

نقطہ کے مقابل خط مستقیم کی دوسری طرف منحنی پر ایک اور نقطہ ایسا ہو کہ ان نقطوں کو ملانے والا وتر خط مستقیم سے زاوے قائمے بنائے اور نقطہ تقاطع پر خود دو برابر حصوں میں تقسیم ہو جائے۔
تعریف۔ مذکورہ بالا خط مستقیم کو منحنی کا محور کہتے ہیں۔
تعریف۔ جس نقطہ پر محور منحنی سے ملتا ہے اُس کو راس کہتے ہیں۔

مسئله ۱

شلمجی پر نقطے دریافت کرنے کا عمل - اگر ماسکہ سے مرتبہ پر عمود نکالا جائے تو وہ شلمجی کا محور تشاکل ہوگا -



فرض کرو کہ س ماسکہ سے اور م لام مرتب ہے۔
س میں سے ایک ایسا مستقیم خط س لا کھینچو جو مرتب

پر عمود ہو اور اس کو سمت لا س میں لا انتہا خارج کرو۔
 س لا کی تنصیف ا پر کرو تب چونکہ س = لا = لا
 اس لئے نقطہ ا شلجی پر واقع ہے۔

لا س یا لا س محدودہ پر کوئی نقطہ ل ل میں
 سے ایک ایسا مستقیم خط ن ل ن کھینچو جو لا ل پر عمود
 ہو، س کو مرکز مان کر ایک ایسا دائرہ کھینچو جس کا
 نصف قطر لا ل ہو اور جو ن ل ن کو ن اور ن پر
 قطع کرے (اگر ممکن ہو) نیز مرتب پر عمود ن م اور ن م
 کھینچو۔

تب چونکہ س ن = ل لا = ن م
 اس لئے نقطہ ن شلجی پر ہے
 اسی طرح سے ن شلجی پر ہے

چونکہ ل ن = ل ن
 اس لئے لا س، ن ن سے زاوے قائمے بناتا
 ہے اور نقطہ تقاطع پر اس کی تنصیف کرتا ہے پس
 مخنی بلحاظ لا س کے متشاکل ہے۔

(۱) اگر ل اور س دونوں کے ایک ہی طرف واقع
 ہوں تو س ل، ل لا سے کم ہوگا اور دائرہ اس
 صورت میں خط ن ل ن کو قطع کرے گا۔

(۲) اگر ل اور س، ا کی متقابل جانبوں میں واقع
 ہوں تو دائرہ مستقیم خط ن ل ن کو قطع نہیں کریگا۔

پس معلوم ہوا کہ شلجی وسعت میں غیر محدود ہے
لیکن یہ سب کا سب اس مستقیم خط کی ایک ہی جانب
میں واقع ہے جو α میں سے گزرتا ہے اور α پر
عمود ہے۔

مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ ۷)

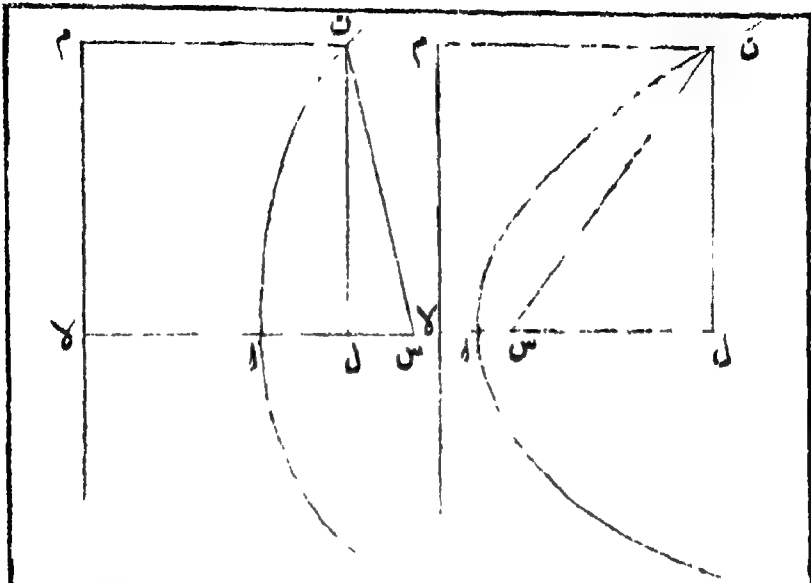
تعریف - شلجی کا محور (س لا) وہ مستقیم خط ہے جو
ماسکے میں سے گزرتا ہے اور مرتب پر عمود ہے۔
تعریف - شلجی کا راس (ا) وہ نقطہ ہے جہاں محور مخنی
کو قطع کرتا ہے۔

تعریف - شلجی کے کسی نقطہ کا معین (ن ل) وہ
عمود ہے جو نقطہ (ن) سے محور پر نکالا جائے
تعریف - فصلہ (ال) محور کا وہ حصہ ہے جو راس اور
معین کے درمیان ہو۔

تعریف - شلجی کے کسی نقطہ کا ماسکی فاصلہ وہ فاصلہ ہے
جو اس نقطہ اور ماسکے کے درمیان ہو

مسئلہ ۲

اگر وتر ن ن مرتب کو نقطہ ک پر قطع کرے تو س
ک ماسکی فاصلوں س ن اور س ن کے خارجی
زاوے کی تنصیف کرے گا۔
س ن اور س ن کو ملاؤ۔



تب ل لا = لا^۲ لا^۲ + لا^۲ لا^۲ + لا^۲ لا^۲ [اقلیدس م ۲ ش ۲]

$$= لا^۲ لا^۲ + لا^۲ لا^۲ + لا^۲ لا^۲$$

[اقلیدس م ۲ ش ۲] لا^۲ لا^۲ + لا^۲ لا^۲ + لا^۲ لا^۲ =

$$= لا^۲ لا^۲ + لا^۲ لا^۲ + لا^۲ لا^۲$$

لیکن لا^۲ لا^۲ = لا^۲ لا^۲ = لا^۲ لا^۲

$$= لا^۲ لا^۲ + لا^۲ لا^۲$$

$$\therefore لا^۲ لا^۲ + لا^۲ لا^۲ = لا^۲ لا^۲ + لا^۲ لا^۲ + لا^۲ لا^۲$$

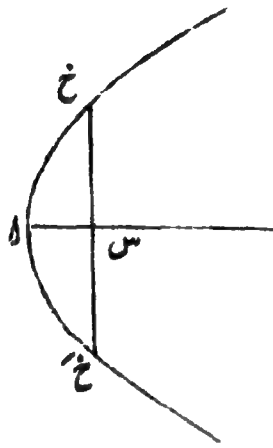
$$لا^۲ لا^۲ = لا^۲ لا^۲ + لا^۲ لا^۲$$

تعریف - ماسکہ میں جو دو کثرتیں گزرتا ہے اس کو ہم

آئیدہ وتر خاص یا معدل (خ خ) کے نام سے موسوم کریں گے۔

مسئلہ ۴

شلبھی کا وتر خاص خ خ = ۱۴ اس



(مسئلہ ۴)

س خ = ۱۴ اس = ۱۴ اس

س خ = ۱۲ اس

خ خ = ۱۴ اس

مشقی مثالین مسئلہ ۱

۱- بندیدہ اقلیدس م اش ۲۳ شلبھی کے محیط کے نقاط دریافت کرد اور اس کو مرتبہ کرد۔

۲- شلبھی کے دو دگنے سین ن ن، ق ق ہیں، ثابت کرد کہ

- ن ق ، ن قی محور سے ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔
- ۳۔ اگر مرتب کے متوازی λ میں سے ایک خط کھینچا جائے اور λ سے λ پر اس خط سے λ پر ملے تو ثابت کرو کہ λ سے λ کی تنصیف λ پر ہوتی ہے [دیکھو شکل مسئلہ ۱]
- ۴۔ نیز ثابت کرو کہ λ سے λ پر عمود ہے اور زاویہ λ سے λ کی تنصیف کرتا ہے۔
- ۵۔ اگر λ سے λ ماسکی فاصلہ λ سے λ پر عمود ہو اور مرتب سے نقطہ λ پر ملے تو ثابت کرو کہ λ سے λ زاویہ λ سے λ کی تنصیف کرتا ہے۔
- ۶۔ اگر ایک غلجی کے دو ماسکی وتر برابر ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط محور سے زاویہ قائمہ بناتا ہے۔
- ۷۔ اگر ایک دائرہ ایک نقطہ معینہ میں سے گزرے اور ایک دئے ہوئے مستقیم خط کو λ سے λ کے مرکز کا طریق دریافت کرو۔
- ۸۔ اگر ایک دائرہ ایک دئے ہوئے دائرہ اور مستقیم خط دونوں کو λ سے λ کے مرکز کا طریق دریافت کرو۔
- ۹۔ اگر کوئی خط محور کے متوازی ہو تو ثابت کرو کہ وہ غلجی سے ایک ہی نقطہ پر ملے گا۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۲

- ۱۔ λ سے λ ماسکی وتر ہے اور λ سے λ اور نقطہ منحنی پر ہے اگر λ سے λ مرتب سے بالترتیب نقاط λ اور λ

پر ملیں تو ثابت کرو کہ کس ک زاویہ قائمہ ہے۔
۲۔ n اور m کو دو ماسکی وتر ہیں، ثابت کرو کہ n اور m قی ایک دوسرے کو مرتب پر قطع کرتے ہیں نیز n اور m قی بھی ایک دوسرے کو مرتب پر ملنے ہیں۔
۳۔ اگر وہ مرتب سے m اور k پر ملیں تو ثابت کرو کہ کس ک زاویہ قائمہ ہے،

۴۔ k کو مرتب کے مختلف نقطوں سے ملاؤ اور مسئلہ ۲ صفحہ (۴) کی مدد سے شلجی کو مرشم کرو۔

۵۔ شلجی پر کوئی نقطہ n ہے، اگر n لا محدود مرتب سے ک پر ملے تو ثابت کرو کہ m ک زاویہ قائمہ ہے۔

۶۔ ایک شلجی اور اس کا ماسکہ دیا ہوا ہے، مرتب دریافت کرو۔

۷۔ n قی ایک شلجی کا دگنا معین ہے اور n لا مستحی کو نقطہ n پر قطع کرتا ہے ثابت کرو کہ n قی ماسکہ میں سے گزرتا ہے۔

مشقی مثالین مسئلہ ۳

۱۔ n ن شلجی کا دگنا معین ہے اگر n ان کے گرد ایک دائرہ کھینچیں اور وہ محور سے ایک دوسرے نقطہ قی پر ملے تو ثابت کرو کہ l قی مستقل ہے اور اس کا طول دریافت کرو۔

۲۔ n ل ن شلجی کا ایک دگنا معین ہے شلجی پر ایک اور نقطہ قی ہے جس میں سے دو مستقیم خط کھینچے گئے ہیں، ایک خط اس میں سے گزرتا ہے اور دوسرا محور کے متوازی ہے یہ

خط ن کو خ اور خ پر قطع کرتے ہیں۔

ثابت کرو کہ $ل \times خ = ن \times ل$

مشقی مثالین مسئلہ ۴

۱۔ شلجی کا ایک دگنا سین ن ن دریافت کرد جو وتر خاص کا دوپہنڈ

۲۔ اگر ایک مثلث خ ۱ خ کے گرد ایک دائرہ بنایا جائے تو ثابت

کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر $= \frac{1}{2} \times$ وتر خاص کا طول

تعریف۔ فرض کرو کہ ن ن منحنی کا کوئی وتر ہے اگر ن

حرکت کر کے ن کے اتنا قریب آجائے کہ یہ دونوں نقطے

ایک دوسرے پر منطبق ہونے کو ہوں تو اس انتہائی مقام

میں وتر ن ن کو منحنی کا مماس نقطہ ن پر کہتے ہیں۔

مسئلہ ۵

اگر شلجی کے نقطہ ن پر مماس کھینچیں اور وہ مرتب

سے سے پرے تو ثابت کرو کہ ن س سے زاویہ قائمہ

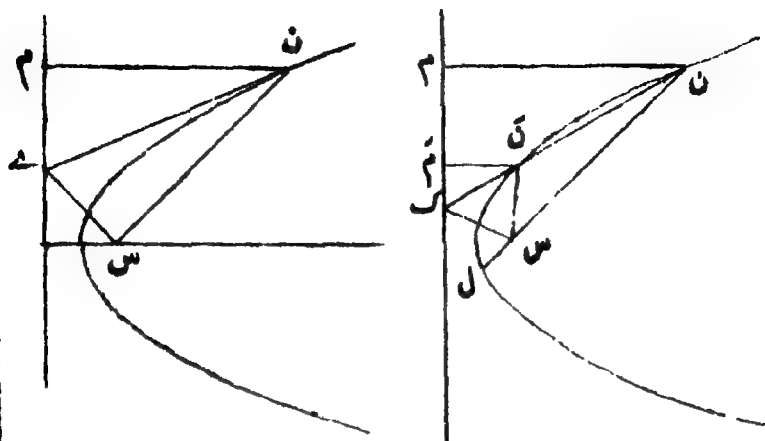
ہے اور ن پر کا مماس اُس زاویہ کی تنصیف کرتا ہے

جو ماسکی فاصلہ س ن اور عمود ن م کے درمیان ہو

جہاں ن م نقطہ ن سے مرتب پر عمود بکالا گیا ہے نیز

ثابت کرو کہ راس پر کا مماس محور سے زاویہ قائمہ

بناتا ہے۔



مسئلہ ۲ کی شکل میں فرض کرو کہ نقطہ ن حرکت کر کے
ن پر پہنچتا ہے اور وتر ن ک ماس ن مے بن
جاتا ہے جب ایسا ہوگا تو س ک ، س مے پر منطبق
ہوگا اور س ن ، س ن پر نیز زاویہ ن س ن
دو قائموں کے برابر ہوگا لیکن ن س ک زاویہ
ن س ل کا نصف ہے (مسئلہ ۲) اس لئے ن س مے
دو قائموں کا نصف ہے یعنی ن س مے ایک زاویہ
قائمہ ہے۔ مرتبہ پر عمود ن م کھینچو۔

$$ن م + م مے = ن مے \quad [اقلیدس م اش ۷۴]$$

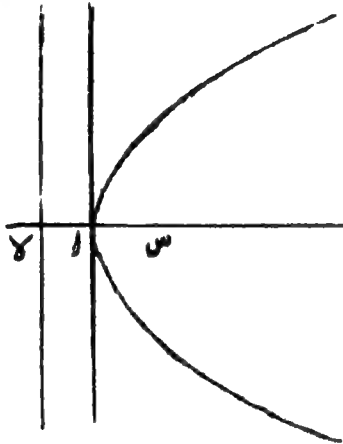
$$= س ن + س مے$$

$$\therefore م مے = س مے \text{ چونکہ } ن م = س ن$$

$$\therefore م مے = س مے$$

یہ مثلثوں م ن اور مے ن س میں

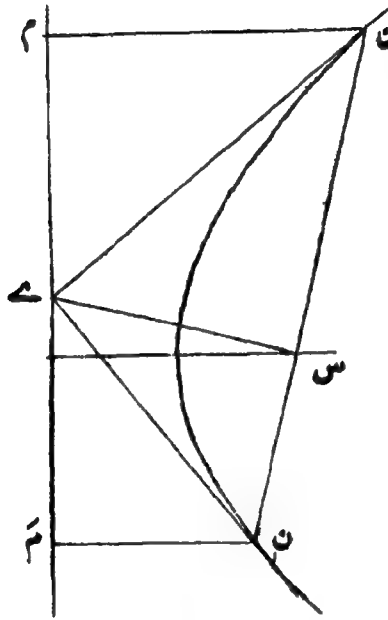
ن م، مے بالترتیب ن س، س مے کے مساوی
ہیں اور ن مے دونوں میں مشترک ہے
∴ زاویہ م ن مے = س ن مے [اقلیدس م اش ۸]



اگر نقطہ ن اس لا پر لیا جائے تو زاویہ س ن م
دو قانوں کے برابر ہوگا اور اس لئے مستقیم زاویہ
س لا پر منطبق ہوگا۔
اب چونکہ ماس زاویہ کی تنصیف کرتا ہے اس لئے وہ
محور سے زاویہ قائمہ بنائے گا۔
شعبی کی تریف سے ثابت کرو کہ جو مستقیم خط زاویہ س ن م کی
تنصیف کرتا ہے وہ منحنی سے ایک دوسرے نقطہ پر نہیں مل سکتا
مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ (۱۴)

مسئلہ ۶

اگر ایک ماسکی وتر کے سروں پر تماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ وہ مرتب پر ملتے ہیں اور ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں



فرض کرو کہ ن س ن ایک ماسکی وتر ہے اور ن پر تماس مرتب کو 'س' پر قطع کرتا ہے
 'س' سے 'ن' کو ملاؤ اور مرتب پر عمود ن م ن م کھینچو۔

تب چونکہ ن م 'ن' پر تماس ہے
 اسلئے س م خط ن س ن سے زاویہ قائمہ بناتا ہے (مئلہ)
 اسلئے ن م 'ن' پر تماس ہے

نیز چونکہ \triangle س ن = م ن ہے [تفہیم م اش ۴]

اسلئے \triangle س م = ن م

اسلئے س م = ن م کا نصف ہے

اسی طرح سے س م = ن م کا نصف ہے

اسلئے ن م = زاویوں س م اور س م

کے مجموعہ کا نصف ہے یعنی یہ دو قائموں کا نصف ہے

اس لئے ن م = ایک قائمہ ہے۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۵

۱۔ اگر در خاص کے سروں پر ماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ وہ

ایک دوسرے کو مرتب کے نقطہ لا پر قطع کرتے ہیں۔

۲۔ اگر ن پر کوئی ماس کھینچا جائے اور اس پر ایک نقطہ و

لیا جائے تو ثابت کرو کہ $وم = وس$

۳۔ اگر ن اور م پر کے ماس نقطہ و پر ملیں اور نقاط ن اور م

سے مرتب پر ن م، ن م عمود کھائے جائیں تو ثابت کرو کہ $وم = وس$

وس، وم سب برابر ہیں۔

اس نتیجہ کے ذریعہ ایک بیرونی نقطہ و سے دو ماس کھینچنے کا

عمل دریافت کرو۔

۴۔ اگر شلجی کے دو ماس وق، وق کھینچے جائیں اور ق ق کا

نقطہ تنصیف میں ہو تو ثابت کر دو کہ دس محور کے متوازی ہے۔

۵۔ اس لئے اگر شاخجی کے دو ماس اور ان کے نقاط ماس دئے ہوئے ہوں تو ماسکہ دریافت کرو۔

۶۔ اگر ن پر کا ماس وتر خاص ممدودہ سے ک پر مرتب ہے مے پر مے تو ثابت کر دو کہ س ک = س مے

مشقی مثالین مسئلہ ۶

۱۔ اگر ماسکی وتر ن کے سروں پر ماس کھینچے جائیں اور وہ نقطہ مے پر ملیں اور ن م، ن م مرتب پر عمود ہوں تو ثابت کر دو کہ م م کی تنصیف مے پر ہوتی ہے، اس لئے ثابت کر دو کہ اگر ن کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو وہ مرتب سے مے پر مس کریگا۔

۲۔ ن س ق ایک ماسکی وتر ہے، ق پر کے ماس پر ق گ عمود ہے اور وہ محور کو نقطہ گ پر قطع کرتا ہے، ن پر کے ماس پر گ مے عمود ہے، ثابت کر دو کہ مے وتر خاص پر واقع ہوتا ہے

۳۔ اگر ایک ماسکی وتر کے سروں پر ماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ وتر خاص پر مساوی جتنے کاٹتے ہیں

تعریف۔ اگر ایک منحنی کے کسی نقطہ پر ماس کھینچا جائے تو جو خط مستقیم نقطہ مذکورہ میں سے گزرے اور ماس کے ساتھ زاویہ قائمہ بنائے اس کو منحنی کے اس نقطہ پر کا عماد کہتے ہیں۔

∴ س ک = س ن = س ط

۱۔ ثابت کرو کہ س م اور ن ط ایک دوسرے کی تنصیف زاویہ قائمہ پر کرتے ہیں۔

۲۔ اگر ط، الا کا نقطہ تنصیف ہو تو ل، اس کا نقطہ تنصیف ہوگا۔

نوٹ ل میں ن ل کا نقطہ زیرین ہے

۳۔ اگر مثلث س ن گ متساوی الاضلاع ہو تو زاویہ ط م گ قائمہ ہوگا۔

۴۔ ثابت کرو کہ ذواربعتہ الاضلاع س ن م مے کے گرد ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے اور یہ دائرہ ن گ کو نقطہ ن پر مس کرتا ہے۔

۵۔ اگر اس دائرہ کا نصف قطر م مے کے برابر ہو تو مثلث س ن گ متساوی الاضلاع ہوگا۔

۶۔ ثابت کرو شلجی کے کسی دو ماسوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کا نصف ہوتا ہے جو اُن کے نقاط تماس کو ملانے والے وتر کے محاذی ماسک پر بنے۔

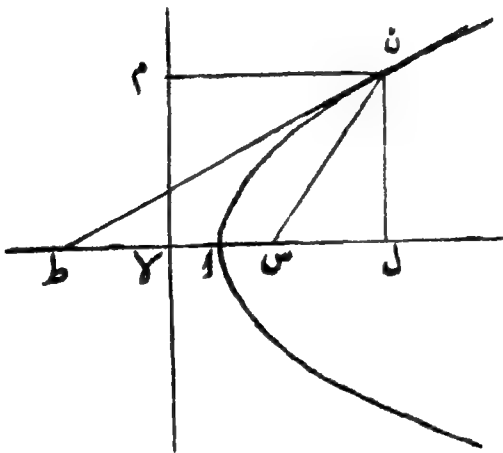
۷۔ ایک مثلث ا ب ج کا قاعدہ ا ب اور زاویہ ج دیا ہوا ہے اُس شلجی کے ماسک کا طریق دریافت کرو جو ج ا اور ج ب کو بالترتیب نقاط ا اور ب پر مس کرے۔

۸۔ دو شلجی خطوں کا ماسک ایک ہی ہے اور ان کے محور ایک ہی مستقیم خط میں واقع ہیں لیکن محوروں کے رخ متقابل سمتوں میں ہیں، ثابت کرو کہ یہ شلجی ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں

تعریف - اگر نقطہ ن پر کا ماس محور کو ط پر ملے اور اسی نقطہ میں سے گزرنے والا معین محور کو ل پر ملے تو ل ط کو نقطہ ن پر کا زیر ماس کہتے ہیں

مسئلہ ۸

ثابت کرو کہ زیر ماس ل ط = ۱ ۲



مرتب پر عمود ن م کہینچو

تب س ط = س ن

ن م =

لا ل =

۱ س = اور

۱ ط =

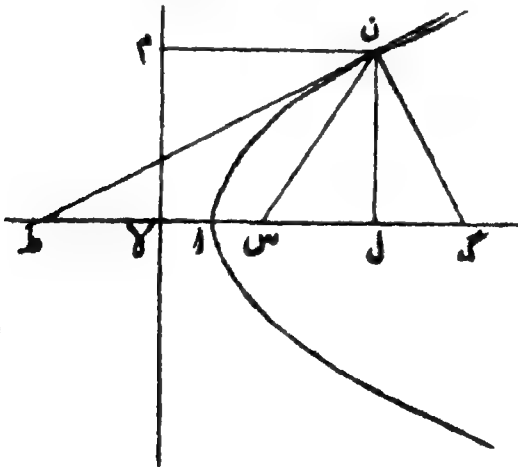
۱ ۲ = ل ط

۱۔ اگر شلٹ ن ل ط کے گرد ایک دائرہ کھینچا جائے اور اس کا نصف قطر س ہو تو ثابت کرو کہ $س ن \times و ل$
 ۲۔ ماسک س میں سے ایک خط ص ق نقطہ ن پر کے ماس کے متوازی کھینچا گیا ہے اور وہ ایک ایسے خط ن ع کو جو محور کے متوازی کھینچا گیا ہے ع پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ع کا طریق ایک شلجی ہے جس کا راس س ہے اور جس کا وتر خاص اصلی شلجی کے وتر خاص کا نصف ہے۔

تعریف۔ اگر نقطہ ن پر کا عماد محور کو گ پر ملے اور ن میں سے گزرنے والا معین محور کو ل پر ملے تو ل گ کو نقطہ ن کا زیر عماد کہتے ہیں۔

مسئلہ ۹

زیر عماد ل گ = ۱۲ اس



[مسئلہ]

مرتب پر عمود ن م کھینچو

تب س گ = س ن

ن م =

لال =

ل گ = س لا

۲ اس =

۱۔ اگر مثلث س ن گ متساوی الاضلاع ہو تو ثابت کرو

کہ س ن = وتر خاص

۲۔ مسئلہ ۴ کو مسائل ۸ اور ۹ سے مستنبط کرو

۳۔ سخنی کے کسی نقطہ معینہ پر عماد کھینچنے کی ترکیب دریافت کرو۔

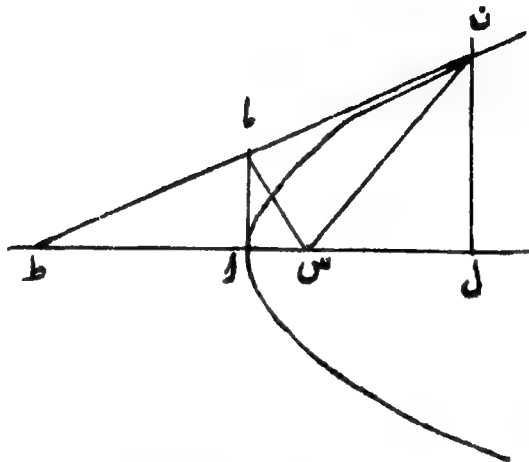
۴۔ اگر ق پر کا سین ق م زیر عماد ل گ کی تنصیف کرے تو ثابت کرو کہ ق م = ن گ

۵۔ ط ن اور ط ق ایک دائرہ کے تماس ہیں، ایک ایسا شلجی بناؤ جو ط ن کو ن پر مس کرے اور ط ق اس کا محور ہو۔

مسئلہ ۱۰

اگر شلجی کے کسی نقطہ ن پر تماس کھینچا جائے اور وہ اس پر کے تماس کو ما پر قطع کرے تو س ما، ن ط کی تنصیف کرے گا اور اس سے زاویہ قائمہ بنائے گا نیز س ما ماسکی فاصلوں س لا اور س ن کے درمیان وسط

تناسب ہوگا (س ما' = اس × س ن)



س ن کو ملاؤ اور محور پر عمود ن ل بکالو
اب چونکہ ط ل کی تنصیف ا پر ہوتی ہے اور اما
متوازی ہے ل ن کے ما' ن ط کا نقطہ تنصیف ہے
زاوے س ما ط اور س مان مساوی ہیں [اقطیس م اش]

∴ س ما' ن ط سے زاویہ قائمہ بناتا ہے

نیز چونکہ مثلث س ما ط میں ما' قاعدہ پر عمود نکالا گیا ہے

∴ س ما' = س ا × س ط [اقطیس م ۶ ش ۹]

[مسئلہ] = س ا × س ن

۱- اگر س ن کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو
ثابت کرو کہ وہ راس پر کے ماس کو ما پر ماس کر بیگا -

۲- ثابت کرو کہ ن ما' × ن مے = س ن

۳۔ ثابت کرو کہ n ما \times ما \times s = s \times n س n
 ۴۔ ثابت کرو کہ اگر s ما کو خارج کیا جائے تو یہ مرتب
 کو m پر ملیگا۔

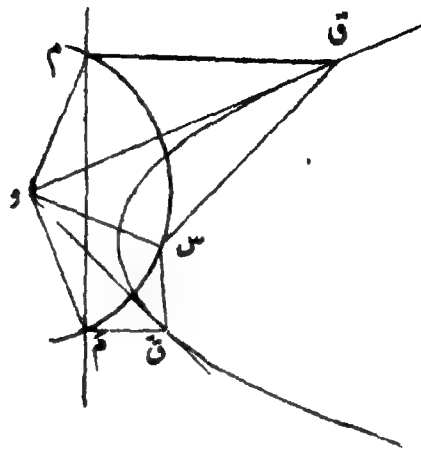
۵۔ اگر وتر خاص کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے اور
 شلجی اور دائرہ کا مشترک مماس n ق ہو جو ان کو تقاط
 n اور q پر بالترتیب s کرے تو ثابت کرو کہ s n
 اور s q میں سے ہر ایک وتر خاص سے 30° کا زاویہ
 بناتا ہے۔

۶۔ ایک شلجی کا ماسکہ اور دو مماس دئے ہوئے ہیں
 معلوم کرو کہ s پر کا مماس کس طرح کھینچا جائے اور
 اس طرح شلجی کے محور اور مرتب یکپہنچنے کی ترکیبیں
 دریافت کرو۔

۷۔ ایک لمبے مستطیل کا غذ کو اس طرح تہ کیا جاتا ہے
 کہ اس کا ایک کونہ ہمیشہ مقابل کے ضلع پر واقع ہوتا
 ہے ثابت کرو کہ جو شکن کا غذ پر اس طرح تہ کرے
 سے پڑتی ہے وہ ہمیشہ ایک ایسے شلجی کو s کرتی ہے
 جس کا مرتب مقابل کا ضلع ہو۔

مسئلہ ۱۱

شلجی کے ایک نقطہ n پر مماس کھینچا گیا ہے اس مماس
 کے ایک نقطہ s سے مرتب اور s n پر عمود نکالے



[تخلیل - فرض کرو کہ وق اور وق دو مماس ہیں
مرتب پر دو عمود ق م اور ق م کھینچو اور وس، وم
وم کو ملاؤ۔

اب چونکہ وق زاویہ س ق م کی تنصیف کرتا ہے اسلئے
مثلث س ق و اور م ق و باہم مساوی ہیں (قلیدس م اش)
اور وم = وس

اسی طرح سے وم = وس، پس م اور م اس طریقہ
سے معلوم ہوئے لہذا عمل مطلوب حاصل ہوا
و کو مرکز اور وس کو نصف قطمان کر ایک دائرہ کھینچو
جو مرتب کو م اور م پر قطع کرے

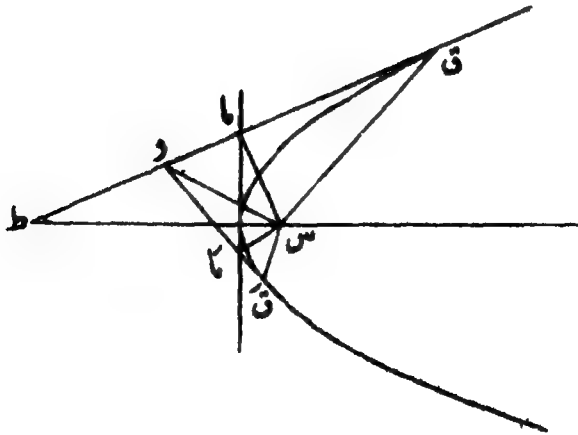
م اور م سے دو خط م ق اور م ق کھینچو جو مرتب
پر عمود ہوں اور شلجی کو نقاط ق اور ق پر ملیں،

وق اور وق کو ملاؤ، وق اور وق مطلوبہ مماس

ہونگے وس، وم، وم، س ق، س ق، س ق کو ملاؤ
 ت مثلثات س ق و اور م ق و میں
 س ق، ق و = م ق، ق و
 اور قاسد وم = قاعدہ وس
 زاویہ س ق و = زاویہ م ق و
 وق نقطہ ق پر کا ماس ہے مسئلہ [اسی طرح وق نقطہ ق پر کا ماس ہے
 نوٹ مسائل ۱۰ یا ۱۱ کے اصول کی بنا پر بھی حل حاصل ہو سکتا ہے
 مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ (۳۶)

مسئلہ ۱۳

ثابت کرو کہ مماسات وق اور وق کے محاذی ماسکہ پر
 مساوی زاوے بنتے ہیں -
 اور مثلثات س وق اور س ق و متشابه ہیں



شلبھی کے راس پر ماس کھینچو جو وق اور وق سے
نقاط ما اور ما پر ملے۔

س ق ، س ق ، س ق ، س ما ، س ما کو ملاؤ
ق و کو اتنا خارج کرو کہ وہ محور سے ط پر ملے
اب چونکہ ما اور ما پر کے زاوے قائم ہیں [مسئلہ ۱۰]
اس لئے جو دائرہ وس کے قطر پر بنایا جائے گا
وہ نقاط ما اور ما میں سے گزرے گا۔
اس لئے زاویہ س وق = زاویہ س ما ما اس واسطے
کہ یہ زاوے ایک ہی قطعہ دائرہ میں واقع ہیں۔

= زاویہ س ط ما [اقلیدس م ۶ ش ۸]

= زاویہ س ق و [مسئلہ ۱۰ اور اقلیدس م ۸ ش ۸]

اسی طرح سے زاویہ س وق = زاویہ س ق و
اس لئے باقی زاوے وس ق اور وس ق آپس میں
برابر ہیں۔ اور مثلث س وق اور س ق و متشابه

ہیں۔
مشق اگر نقطہ و میں سے ایک خط محور کے متوازی کھینچا
جائے تو یہ خط اور وس ماسوں کے ساتھ
مساوی زاوے بنائینگے۔

مشق مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ (۳۶)

∴ وم = وس

اسی طرح سے وم = وس

∴ وم = وم

اور چونکہ ور مثلث متساوی الساقین وم م کے قاعدہ پر عمود ہے اس لئے وہ قاعدہ کی تنصیف کرتا ہے

∴ م ر = م ر

لیکن ق ص : ص ق = م ر : ر م

∴ ق ص = ص ق یعنی ق ق کی تنصیف ص

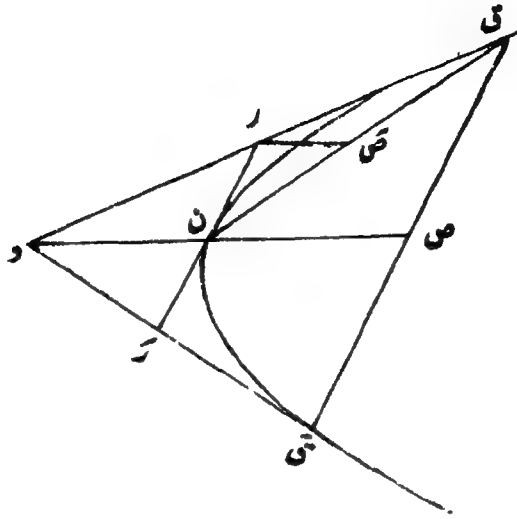
پر ہوتی ہے۔

مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ (۳۷)

مسئلہ ۱۵

اگر ایک مکانی کے متوازی دتروں کا ایک نظام دیا ہو تو ثابت کرو کہ دتروں کے وسطی نقاط کا طریق ایک ایسا مستقیم خط ہوگا جو محور کے متوازی ہو اور اُس مماس کے نقطہ تماس میں سے گزرے جو دتروں کے متوازی ہو۔

فرض کرو کہ مماس ر ن دتروں کے متوازی ہے



ن نقطہ تماس ہے اور ق ق مذکورہ وتروں میں سے ایک وتر ہے۔

نقطہ ن میں سے ایک ایسا خط ون ص کھینچو جو ق ق سے ص پر اور تماس ق رو سے و پر ملے۔ ن ق کو ملاؤ اور رص کو محور کے متوازی کھینچو، یہ ن ق کی تنصیف ص پر کریگا۔ (مسئلہ ۱۴)

تب ور = ر ق کیونکہ رص، ون کے متوازی ہے [اقلیدس م ۴ ش ۲]

اور ون = ن ص کیونکہ ون، ص ق کے متوازی ہے اسی سے اگر ہم ایک تماس ق رو ایسا کھینچیں جو ون ص سے نقطہ و پر ملے تو ون = ن ص اس سے معلوم ہوا کہ و اور و ایک دوسرے پر منطبق ہوتے

ہیں۔
 چونکہ وق اور وق ماس ہیں اور وہیں محور کے متوازی
 ہے اس لئے ص و ترقی ق کی تنصیف کرتا ہے [سئلہ ۳۸]
 اسلئے اُن تمام دتروں کے وسطی نقاط جو رن کے
 کے متوازی ہیں ایک ایسے مستقیم خط پر واقع ہیں جو
 نقطہ ن میں سے گزرتا ہے اور محور کے متوازی ہے۔
 تعریف۔ اگر کسی مغنی کے متوازی دتروں کا ایک
 نظام کھینچا جائے تو دتروں کے وسطی نقاط کے طریق
 کو قطر کہتے ہیں۔

نوٹ۔ ضروری نہیں کہ سب مغنی خطوں کے لئے یہ قطر ایک مستقیم
 خط ہو مگر مندرجہ بالا سے ظاہر ہے کہ مکانی کی صورت میں قطر ایک مستقیم
 خط ہے۔

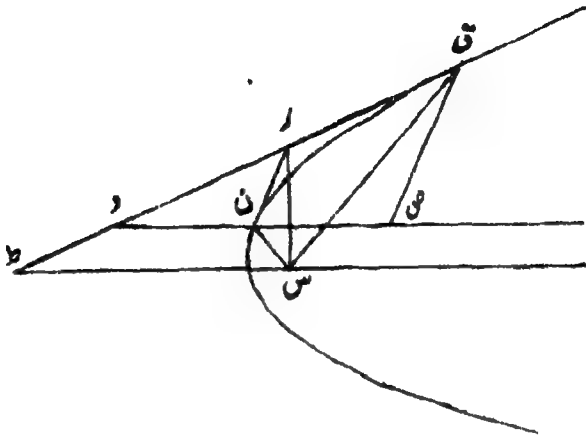
مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ (۳۸)

تعریف۔ نصف قطر (ق ص) جو مغنی اور قطر کے درمیان
 واقع ہے قطر کا معین کہلاتا ہے۔

مسئلہ ۱۶

اگر قطر ن ص کا سین ق ص ہو اور ق پر کا ماس
 ص ن ممدودہ سے و پر لے تو ثابت کرو کہ
 ون = ن ص

قی صی = ۴ س ن × ن ص



فرض کرو کہ قطر ن ص مکانی سے نقطہ ن پر ملتا ہے
نقطہ قی پر تماس کھینچو جو قطر سے وپر اور محور سے ط
پر ملے۔

نقطہ ن پر تماس کھینچو جو وق سے ر پر ملے
س ن، س ر، س قی کو ملاؤ

اب چونکہ ر ن، ر قی دو تماس ہیں

∴ مثلث س ر ن اور س قی ر متشابه ہیں [مسئلہ ۱۳]

∴ زاویہ س ر ن = زاویہ س قی ر

= زاویہ س ط ر [مسئلہ ۷]

= زاویہ ن و ر [اقلیدس م اش ۲۹]

اور زاویہ س ن ر = زاویہ و ن ر

کیونکہ ن پر کا تماس زاویہ س ن و کی تنصیف

کرتا ہے [مسئلہ ۵]

∴ مثلث $س ر ن$ اور $ن و ر$ متشابه ہیں

∴ $ن ر = س ن \times ن و$

اب $و ص$ کی تنصیف $ن$ پر ہوتی ہے (مسئلہ ۱۶)

∴ $ق ص = ۲ ن ر$

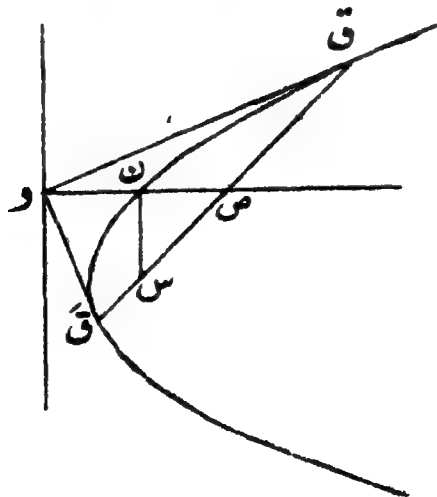
∴ $ق ص = ۲ ن ر$

$$۴ = س ن \times ن و = ۴ س ن \times س ن \times ص$$

شقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحات ۳۸ اور ۳۹

مسئلہ ۱۸

اگر $ق ر ن ص$ منحنی سے نقطہ $ن$ پر ملے اور $ماسکی و تر$
 $ق س ق$ کی تنصیف کرے تو ثابت کرو کہ $ق ق = ۴ س ن$



ماسات وق اور وق کھینچو، یہ ایک دوسرے کو مرتب
پر قطع کریں گے اور ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ
بنائیں گے۔ (مسئلہ ۱۶)

قطر و ص کھینچو اور سن کو ملاؤ۔
اب چونکہ و ص ایک مثلث قائم الزاویہ ق ق وق
کے قاعدے کی تنصیف کرتا ہے۔

∴ ق ق = و ص [اقلیدس م ۳ مش ۳۱]

∴ ق ق = ۲ و ص

لیکن و ن = س ن [شجعی کی تعریف سے]

∴ و ص = ۲ س ن [مسئلہ ۱۶]

∴ ق ق = ۴ س ن

مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ ۳۹



تب ق و × ق و = ق ص - وص [اقلیدس ۲ مش ۵]

ق ص - ف ز [اقلیدس ۱ ش ۳۴]

۴ س ن × ن ص - ۴ س ن × ن (۱۷)

۴ س ن × ر ص

۴ س ن × و ف

اسی طرح سے ق و × ق و = ۴ س ن × و ف

∴ ق و × ق و : ق و × ق و = ۴ س ن : ۴ س ن

مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ ۳۹

مشقی مثالیں

مسئلہ ۱۲

۱۔ اگر نقطہ دمرتب پر ہو تو اس مسئلہ کے عمل سے ثابت کرو کہ ماس ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں

۲۔ اگر شکل وق س ق متوازی الاضلاع ہو تو نقطہ و کا مقام دریافت کرو۔

مسئلہ ۱۳

۱۔ اگر مثلجی کا ایک تیسرا ماس کھینچا جائے جو وق اور وقی سے

نقاط د اور ط پر ملے تو ثابت کرو کہ مثلث و ر ط کے گرجہ دائرہ کھینچا جائے گا وہ س سے گزریگا

۲۔ ایک شلجی تین مستقیم خطوں کو مس کرتا ہے، اس کے ماسک کا طریق دریافت کرو۔

۳۔ چار مستقیم خطوں کے مقام معلوم ہیں اور ایک شلجی ان میں سے ہر ایک کو مس کرتا ہے، ہندی عمل کے ذریعہ سے اس کے ماسک دریافت کرو،

۴۔ ثابت کرو کہ وقی اور وقی کے درمیان دس وسط متناسب ہیں پہلا کونسا مسئلہ اس کی خاص صورت ہے؟

۵۔ ایک شلجی کے دو ماس اور ان میں سے ایک کا نقطہ تماس معلوم ہے، ثابت کرو کہ ماسک کا طریق ایک ایسا دائرہ ہے جو مذکورہ نقطہ تماس اور مماسات کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے اور ایک ماس کو مس کرتا ہے۔

۶۔ اگر مماسات وقی اور وقی کے درمیانی زاویہ وقی کا منصف محور سے ر پر ملے تو ثابت کرو کہ $و = س$ ر

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۴

۱۔ اگر ایک ماسکی وتر کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ مرتب کو مس کریگا۔

۲۔ ثابت کرو کہ ایک ماسکی وتر کے سروں پر کے عماد ایک دوسرے کو اس قطر پر قطع کرتے ہیں جو وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

۳۔ دو ماس اور ان کے نقاط تماس دے ہوئے ہیں ماسک اور مرتب

دریافت کرو۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۵

- ۱۔ شلجی کے متوازی وتروں کا ایک سلسلہ معلوم ہے، ثابت کرو کہ ہر ایک وتر کے سروں پر کے تماس ایک دوسرے کو ایک ہی مستقیم خط پر قطع کرتے ہیں۔
- ۲۔ ایک شلجی کا خاکہ کاغذ پر کھینچا گیا ہے، اس کا محور اور مرتب دریافت کرو۔

۳۔ اگر وتر محور سے ۴۵° کا زاویہ بنائیں تو ان کے وسطی نقاط میں گزرنے والا خط وتر خاص کے ایک سروے میں سے گزرے گا۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۶

- ۱۔ اگر و ص پر عمود ق د کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ ق د = ۴ اس × ن ص
- ۲۔ ن پر کا قطر ط ن ص ہے اور ق پر کا معین ق ص اور ق پر کا تماس ق ط ہے، اگر ق ص = ط ص تو ثابت کرو کہ ط مرتب پر واقع ہے۔
- ۳۔ نقطہ ص میں سے کوئی وتر ل ص ل کھینچا گیا ہے اور قطر

ن ص کے معین ل م ، ل م نقاط ل اور ل سے کھینچے گئے
ہیں ثابت کرو کہ $ل م \times ل م = ق ص$

۴۔ شلجی کے کسی تماس کے نقطہ تماس میں سے ایک وتر
کھینچا گیا ہے اگر محور کے متوازی ایک اور خط کھینچا جائے جو
ماس، منحنی اور وتر سے تین نقطوں پر ملے تو ثابت کرو کہ یہ نقطے
خط کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کریں گے جن کی باہمی نسبت وہی
ہوگی جو وتر کے دو حصوں کی ہے۔

۵۔ ایک نقطہ معلومہ میں سے شلجی کا ایک ایسا وتر کھینچو جو اس
نقطہ پر ایک نسبت معلومہ میں تقسیم ہو جائے۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۸

- ۱۔ ایک ماسکی وتر ن س ق ایسا کھینچو کہ $س ن = ۳ س ق$
- ۲۔ اگر ایک قطر مرتب سے نقطہ و پر ملے تو د س اُن سب
دتروں پر عمود ہوگا جن کی قطر تنصیف کرتا ہے۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۹

- ۱۔ شلجی کا ماسکہ کسی ماسکی وتر کو دو حصوں میں تقسیم کرتا
ہے، ثابت کرو کہ ان دو حصوں کا اوسط موسیقی نصف وتر خاص
کے برابر ہے۔

۲۔ اگر قطر ن ص کا معین ق ص ہو اور ن ق کا مزدوج
 قطر ن ص موجون ق سے ص پر ملے تو ثابت کرو کہ
 $\frac{1}{n} = \frac{1}{m}$ ن ص



قائم تظیل

تعریفات ۱۔ اگر کسی نقطہ سے ایک ثابت سطح پر عمود نکالا جائے تو عمود کے پائیں کو اس نقطہ کا ظل کہتے ہیں اور ثابت سطح کو سطح تظیل کہتے ہیں۔
 ۲۔ ایک مستقیم یا منحنی خط کا ظل اس سے نقطوں کے ظلوں کا مجموعہ ہوتا ہے، یعنی اگر خط مذکور کے سب نقطوں سے سطح تظیل پر عمود نکالے جائیں تو عمودوں کے نقاط زیرین کا جو طریق ہوگا اس کو اس خط کا ظل کہیں گے۔

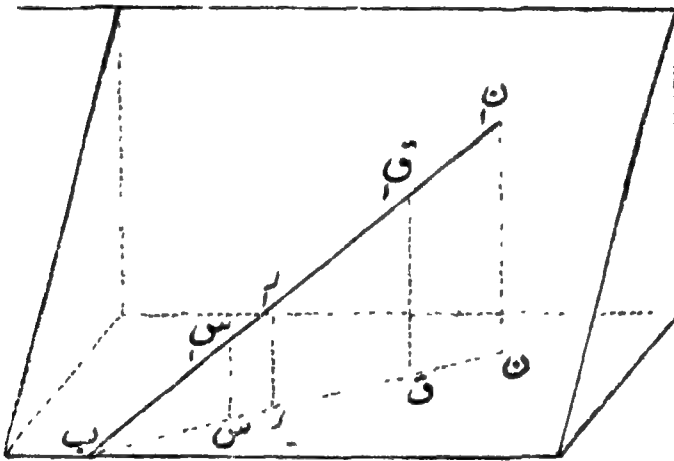
۳۔ اگر ایک خط یا ایک سے زیادہ خطوط کسی دے ہوئے رقبہ کا احاطہ کریں تو اس رقبہ کا ظل وہ رقبہ ہوگا جو اس خط یا خطوط کے ظلوں سے گھرا ہوا ہو۔

۴۔ اگر ایک دیا ہوا منحنی کسی خاص سطح پر واقع ہو اور وہ سطح، سطح تظیل کو ایک مستقیم خط پر قطع

کرے تو اس خط کو ہم بنیادی خط کہیں گے۔

مسئلہ ۱

ثابت کرو کہ ایک مستقیم خط کا ظل ایک مستقیم خط ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ $ن ق ر$ دیا ہوا مستقیم خط ہے جو بنیادی خط کو نقطہ $ب$ پر ملتا ہے۔ اور فرض کرو کہ $ن$ ، $ق$ ، $ر$ ، $س$ کے ظل بالترتیب $ن$ ، $ق$ ، $ر$ ، $س$ ہیں۔

(بحکم اقلیدس م ۱۱ ش ۶ اور ۷) عمود $ن$ ، $ق$ ، $ر$ ، $س$ ایک سطح مستوی $ن$ ، $ب$ میں واقع ہوتے ہیں اور یہ سطح، سطح تظلیل کو مستقیم خط $ب ن$ پر قطع کرتی ہے (اقلیدس م ۱۱ ش ۳)

اس سے معلوم ہوا کہ ب ن کا ظل ایک مستقیم خط ب ن ہے اور یہ دونوں خط ایک دوسرے کو ایک نقطہ ب پر قطع کرتے ہیں جو بنیادی خط پر واقع ہے۔

مسئلہ ب

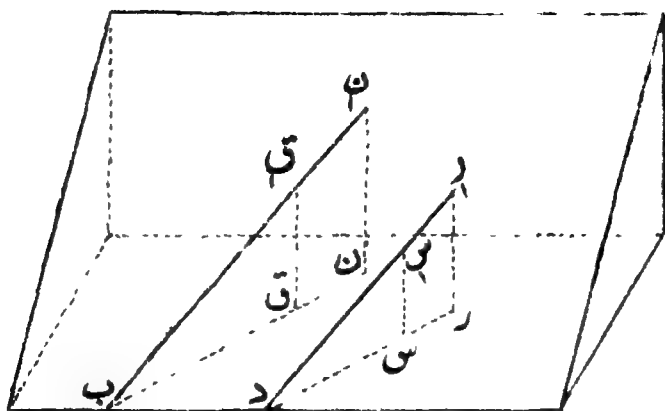
ایک محدود مستقیم خط کے حصوں کی نسبت تظیل سے نہیں بدلتی۔

فرض کرو کہ ن، ق، ر، س، ب ایک دیا ہوا مستقیم خط ہے اور ن، ق، ر، س، ب اس کا ظل ہے۔
ن، ق، ر، س، ب سب متوازی ہیں کیونکہ وہ سب کے سب ایک ہی سطح مستوی ن، ب، ن میں واقع ہیں اور سطح تظیل پر عمود ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ حصوں ن، ق، ر، س کی آپس میں وہی نسبت ہے جو ن، ق، ر، س کو آپس میں ہو (اقلیدس م ۶ ش ۲)

مسئلہ ج

ثابت کرو کہ متوازی اور مستقیم خطوں کے ظل متوازی اور مستقیم خط ہوتے ہیں اور تظیل کے بعد ان کے

طولوں کی باہمی نسبت وہی رہتی ہے جو پہلے تھی۔



فرض کرو کہ $ن ق$ $ب$ اور $ر س$ $د$ دو متوازی اور
اور مستقیم خط ہیں جو بنیادی خط کو نقاط $ب$ اور $د$ پر
مٹتے ہیں اور فرض کرو کہ $ن ق$ $ب$ اور $ر س$ $د$
ان کے غلے ہیں۔

$ن ن$ متوازی ہے $ر ر$ کے [اقطیس م ۱۱ اش ۶]
 $ن ق$ متوازی ہے $ر س$ کے [مفروض]

سطح $ب ن ن$ متوازی ہے سطح $د ر ر$ کے [اقطیس م ۱۱ اش ۱۵]
اسلئے $ن ق$ $ب$ متوازی ہے $ر س$ $د$ کے [اقطیس م ۱۱ اش ۱۶]

نیز مثلثات $ن ب ن$ اور $ر د ر$ متساوی الزویا
ہیں [اقطیس م ۱۱ اش ۱]

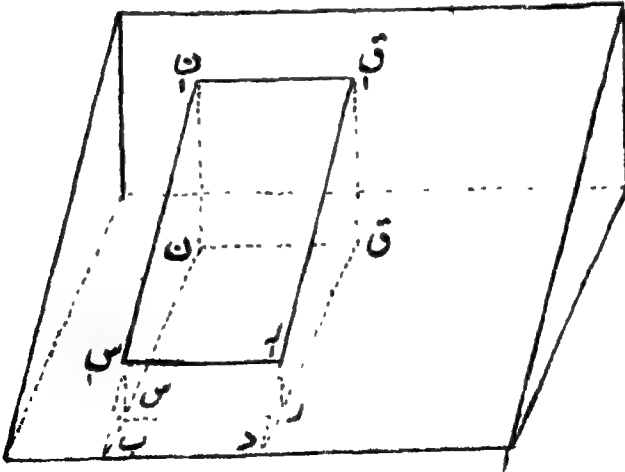
$$ن ق : ن ق = ن ب : ن ب$$

$$= ر د : ر د$$

کہ آخر الامر اس پر منطبق ہو جاتا ہے یعنی م م منحنی کا تماس بن جاتا ہے جب ایسا ہوتا ہے تو ن حرکت کر کے ن کے اتنا قریب آ جاتا ہے کہ آخر کار وہ اس پر منطبق ہو جاتا ہے اور ن ن منحنی معلوم کے نکل کا تماس بن جاتا ہے

نیز ظاہر ہے کہ یہ مستقیم خط بنیادی خط کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں (مسئلہ ۱)

مسئلہ ۲
ثابت کرو کہ رقبوں کی نسبت تطیل سے نہیں بدلتی



صورت اول فرض کرو کہ ن ق ر س ایک مستطیل ہے

جس کے دو اضلاع n و q اور r بنیادی خط کے متوازی ہیں اور فرض کرو کہ n و q r اس کا ظل ہے، n و r اور q کو اتنا خارج کرو کہ وہ بنیادی خط کو بالترتیب نقاط b اور d پر ملیں

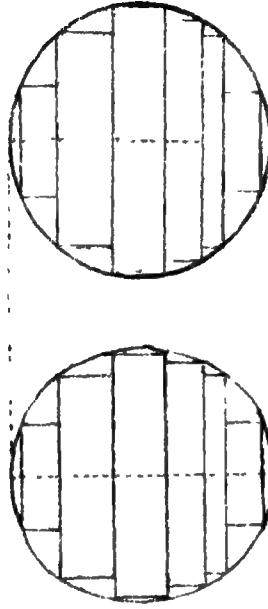
رقبہ n و q r : رقبہ n و q r = n و q r : n و q r = n و q r =

n و q : n و q =

اب اس نسبت کی قیمت مستطیل کے طول اور عرض پر منحصر نہیں ہے (کیونکہ یہ جمیع کے برابر ہے جہاں اصلی سطح اور سطح تطیل کا درمیانی زاویہ وہ ہے) پس معلوم ہوا کہ تطیل سے ایسے تمام مستطیلوں کا رقبہ ایک ہی نسبت سے کم ہوتا ہے اور اگر اصلی سطح میں کسی ایک ایسے مستطیل ہوں تو ان کی باہمی نسبت وہی ہوگی جو ان کے ظلوں کی ہے۔

صورت دوم فرض کرو کہ ہمیں کوئی ہندی شکل دی ہوئی ہے، خواہ یہ کسی طرح کی ہو ہم اس کے اندر ایسے متوازی خط کھینچ سکتے ہیں جو بنیادی خط پر عمود ہوں اور اس طرح سے اس کو بہت سے باہر ٹکڑوں میں تقسیم کر سکتے ہیں۔ اب اگر ایسا کیا جائے تو ہر ایک ٹکڑا مستطیل شکل کا ہوگا اور اس کے

دو نوں سروں پر دو چھوٹے چھوٹے رقبے بچھئے

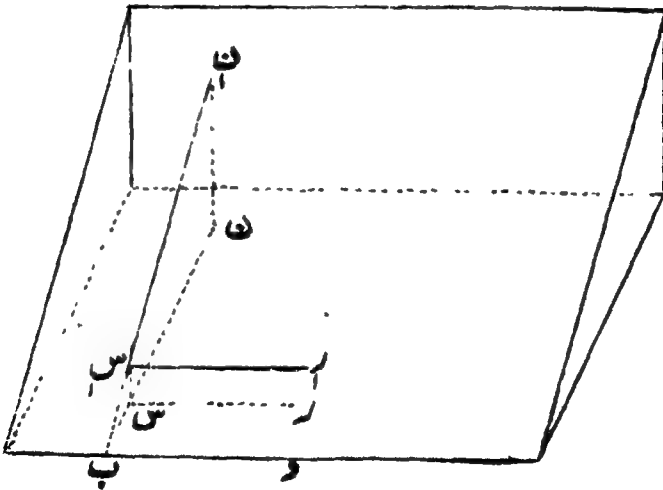


ہم صورت اول میں ثابت کر چکے ہیں کہ ایسے ہر ایک مستطیل کی نسبت اپنے ظل سے مستقل ہوتی ہے پس معلوم ہوا کہ ایسے مستطیلوں کے مجموعہ کو اپنے ظلوں کے مجموعہ کے ساتھ مستقل نسبت ہوگی۔ اب اگر ان مستطیلوں کے عرضوں کو بے حد کم کر دیا جائے اور اس طرح سے ان کی تعداد کو بڑھا دیا جائے تو ان (مستطیلوں) کے مجموعہ اور دئے ہوئے رقبہ کے تفاوت کو ہم بے حد کم کر سکتے ہیں

اس لئے معلوم ہوا کہ تظیل سے کسی شکل کا رقبہ ایک ہی نسبت (۱: حجم) سے کم ہوتا ہے اور اصلی سطح پر کے تمام رقبوں کو آپس میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے ظلوں کو آپس میں ہو۔

مسئلہ

اگر دو مستقیم خط ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں تو ان کے ظل بھی ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں گے بشرطیکہ اصلی خطوں میں سے ایک خط بنیادی خط کے متوازی ہو۔



فرض کرو کہ دو مستقیم خط $ن س$ اور $س ر$ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور ان میں سے ایک

خط $س ر$ بنیادی خط $ب د$ کے متوازی ہے
 فرض کرو کہ ان کے ظل $ن س$ اور $س ر$ ہیں
 اب چونکہ $س ر$ ، $ب د$ کے متوازی ہے
 اس لئے یہ خط سطح تظیل $ن س ب د$ کو نہیں
 ملتا اس لئے $س ر$ اپنے ظل $ن س$ کو نہیں ملتا۔
 نیز $س ر$ اور $س ر$ ایک ہی سطح میں واقع ہیں
 اس لئے وہ ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔
 لیکن $س ر$ ، $س س$ سے زاویہ قائمہ بناتا ہے
 اسلئے $س ر$ ، $س س$ سے زاویہ قائمہ بناتا ہے [اقیدس م ۱۱ اش ۲۹]
 نیز $س ر$ ، $ن س$ سے زاویہ قائمہ بناتا ہے [مفروض]
 نیز $س ر$ ، سطح $ن س ب س$ سے زاویہ قائمہ بناتا ہے [اقیدس م ۱۱ اش ۲۹]
 نیز $س ر$ ، سطح $ن س ب س$ سے زاویہ قائمہ بناتا ہے [اقیدس م ۱۱ اش ۲۹]
 اور $ن س$ زاویہ قائمہ ہے۔
 نوٹ۔ قائم الزاویہ کا ظل قائم الزاویہ نہیں ہوتا جب تک
 کہ اصلی زاویہ کی ایک ساق بنیادی خط کے متوازی نہ ہو۔



قطع ناقص یا بیلیجی

تعریف ۱۔ بیلیجی (یا قطع ناقص) ایک ایسے نقطہ (ن) کا طریق ہے جس کے فاصلے ایک ثابت نقطہ (س) اور ایک ثابت مستقیم خط لام سے ایسی مستقل نسبت رکھتے ہوں جو ہمیشہ ایک سے کم ہوتی ہے

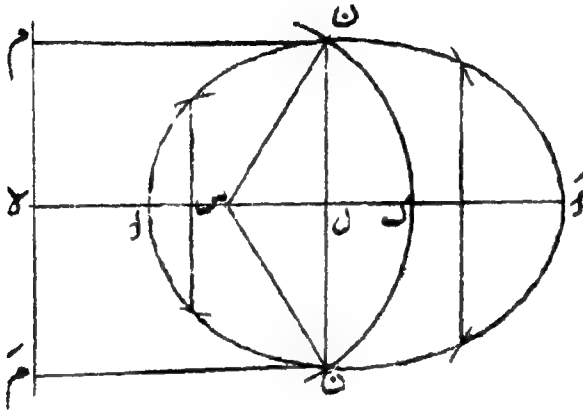
(س ن = لام ن م)

- ۲۔ ثابت نقطہ (س) کو ماسکہ کہتے ہیں
- ۳۔ ثابت خط مستقیم (لام) کو مرتب کہتے ہیں
- ۴۔ مستقل نسبت (ر) کو خروج المرکز کہتے ہیں

مسئلہ ۱

بیلیجی پر کے نقطے دریافت کرنے کا عمل۔
اگر ماسکہ سے مرتب پر عمود نکالیں تو وہ منحنی کا

محور تشاکل ہوگا راس ۱ اور ۲ کا دریافت کرنا



ماسک سے مرتب پر عمود سے لا نکالو
لا سے کو ۱ پر اس طرح تقسیم کریں کہ

$$س ۱ = ر \times لا$$

نیز لا سے ممدودہ پر ایسا نقطہ ۲ لو کہ

$$س ۲ = ر \times لا$$

تب ۱ اور ۲ دو نقطے معنی پر ہیں بموجب تعریف۔
خط مستقیم ۱۲ پر کوئی نقطہ ل لو، س کو مرکز
مانکر ایک دائرہ کھینچو جس کا نصف قطر $ر \times لا$ ہو،
نقطہ ل میں سے خط ۱۲ پر عمود ن ل ن
کھینچو جو دائرہ کو نقاط ن اور ن پر ملے، تب
نقاط ن اور ن رابطی ہوں گے، مرتب پر عمود
ن م اور ن م کھینچو

س ن = ر x ل = ر x ن م

س ن = ر x ل = ر x ن م

پس معلوم ہوا کہ اگر $اؤ$ پر کوئی نقطہ $ل$ ہو تو اس کے حائل، عمل بالا سے ہم کو دو ایسے نقطے $ن$ اور $ن$ منحنی پر حاصل ہوتے ہیں جو $اؤ$ کی مقابل جانبوں میں واقع ہیں اور جن کے فاصلے $اؤ$ سے مساوی ہیں، اس سے ظاہر ہے کہ بیلی بلحاظ $اؤ$ کے متشکل ہے یعنی $اؤ$ محور ہے اور نقاط $اؤ$ اور $اؤ$ اس کے راس ہیں۔

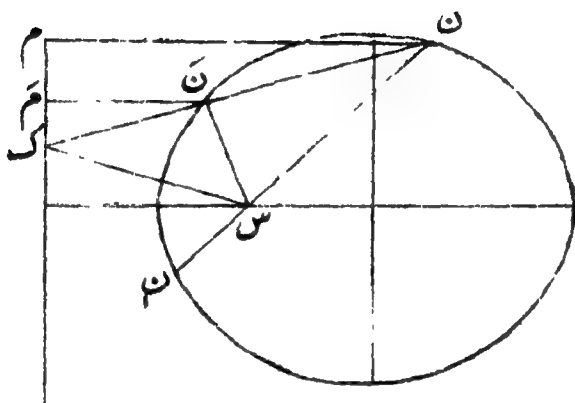
نوٹ یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر نقطہ $اؤ$ اور $اؤ$ کے درمیان محور $اؤ$ کے کسی مقام پر واقع ہو تو دائرہ عمود $ل$ کو قطع کریگا لیکن جس صورت میں نقطہ مذکورہ $اؤ$ کے باہر ہو تو دائرہ اس عمود کو قطع نہیں کریگا اس سے معلوم ہوا کہ اگر $اؤ$ اور $اؤ$ پر ایسے خط کھینچے جائیں جو محور پر عمود ہوں تو بیلی بالکل ان کے درمیان واقع ہوگا۔ دیکھو ضمیمہ

ردیفوں کے لئے دیکھو صفحہ (۵۸ و ۵۷)

مسئلہ ۲

اگر وتر $ن$ مرتب کو نقطہ $ک$ پر قطع کرے تو

ثابت کرو کہ س ک، س ن اور س ن کے
خارجی زاوے کی تنصیف کرتا ہے



س ن، س ن، س ک کو ملاؤ۔ ن س کو ن تک
حناج کرو

اور مرتب پر عمود ن م اور ن م نکالو

$$\text{تب } س ن = ر \times ن م$$

$$س ن = ر \times ن م$$

$$س ن : س ن = ن م : ن م$$

= ن ک : ن ک کیونکہ مثلثات ن ک م

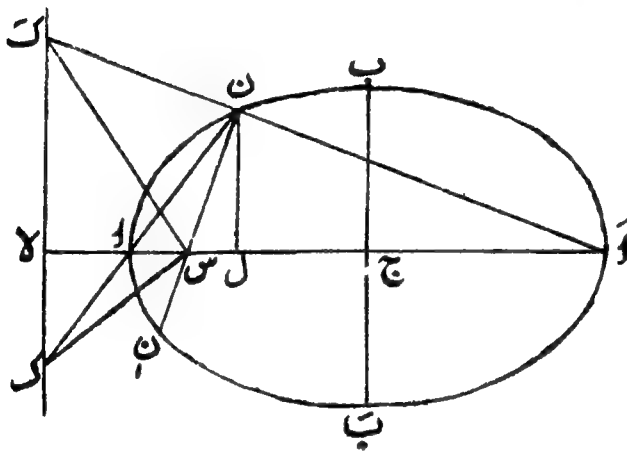
اور ن ک م متشابه ہیں اس لئے س ک زاویہ
ن س ن کی تنصیف کرتا ہے [اقلیدس م ۶ ش ۱]

مشقی مثالیں مسئلہ ۲

- ۱۔ n s n ایک ماسکی وتر ہے، ثابت کرو کہ lan اور lan محور سے مساوی زاوے بناتے ہیں
- ۲۔ n s n ایک ماسکی وتر ہے، اگر n اور n کو خارج کیا جائے تو وہ مرتب کو نقاط k اور k پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ k s k زاویہ قائمہ ہے
- ۳۔ دو وتر n q اور n q مرتب کو بالترتیب e اور e پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ زاویہ e s e زاویہ n s n کا نصف ہے۔
- ۴۔ اگر ایلیپس کا ماسکہ دیا ہوا ہو اور منحنی پر کے دو نقاط d ہوں تو ثابت کرو کہ مرتب ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے گا۔
- تعریف** اگر ماسکہ (s) میں سے گزرنے والا محور ایلیپس کو l اور k پر ملے تو l کو محور اعظم کہتے ہیں
- تعریف** اگر l کی تنصیف j پر کی جائے تو j کو ایلیپس کا مرکز کہتے ہیں
- تعریف** دگنے sc b j کو جو مرکز j میں سے کھینچا جائے منحنی کا محور اصغر کہتے ہیں

مسئلہ ۳

اگر بیلی کے کسی نقطہ ن کا معین ن ل ہو تو
 $ن ل : ا ل = ج ب : ج ا$
 اور ج ب طول میں ج ا سے کم ہے



ن ا، ا ن کو ملاؤ اور ان کو اتنا خارج کرو کہ وہ
 مرتب کو ک اور ک پر ملیں س ن، س ک،
 س ک کو ملاؤ اور ن س کو ن، ن ک خارج کرو
 مشابہ مثلثوں ن ا ل، ک ا ل سے
 $ن ل : ا ل = ک ل : ا ل$
 مشابہ مثلثوں ن ا ل، ک ا ل سے
 $ن ل : ا ل = ک ل : ا ل$
 $ن ل : ا ل = ک ل : ا ل$

لیکن س ک زاویہ اس ن کی تنصیف کرتا ہے [مسئلہ ۱]
اور س کے زاویہ اس ن کی تنصیف کرتا ہے [مسئلہ ۲]
۳ ک س کے قائمہ ہے

۴ ک لا \times ک لا = س لا [اقلیدس م ۱ ش ۱]

۵ ن ل : ا ل \times ا ل = س لا : لا \times لا

اسی طرح سے چونکہ ن ب پر منطبق ہو سکتا ہے
اس لئے

ب ج : ا ج = س لا : لا \times لا

۶ ن ل : ا ل \times ا ل = ب ج : ا ج

نیز ب ج : ا ج = س لا : لا \times لا

اب س لا = لا + س لا = لا (۱ + ر)

س لا = لا - س لا = لا (۱ - ر)

۷ س لا = لا (۱ - ر) \times لا \times لا > لا \times لا

۸ ب ج > ا ج

مشقی مثالیں مسئلہ ۱

۱- اگر ایک شبلی اور ایک بیلی کا ماسکہ ایک ہی ہو
اور متظم بھی مشترک ہو تو ثابت کرو کہ شبلی، بیلی کے
بالکل باہر واقع ہوتا ہے -

۲- ثابت کرو کہ ایک نقطہ ن بیلی کے اندر واقع ہوگا

اگر نسبت $S : N$: M خروج مرکز سے چھوٹی ہو، اور
منحنی پر واقع ہوگا اگر یہ نسبت خروج مرکز کے برابر ہو
اور منحنی کے باہر واقع ہوگا اگر یہ نسبت خروج مرکز سے
بڑی ہو، اس میں $N : M$ منتظم پر عمود کھینچا گیا ہے۔
۳۔ بیلیجی کا کوئی وتر NQ مرتب کو R پر ملتا ہے، ثابت
کرو کہ

$$S : N : R = S : Q : R$$

۴۔ ایک مستقیم خط بیلیجی کو N پر اور مرتب کو
 R پر ملتا ہے، N پر کوئی نقطہ K ہے اور K سے
 S اور R کے متوازی کی کھینچا گیا ہے جو S اور N کو
پر ملتا ہے،

نیز K سے مرتب پر عمود K سے نکالا گیا ہے، ثابت
کرو کہ $S : Y = R : X$ کا ہے

مشقی مثالیں مسئلہ ۳

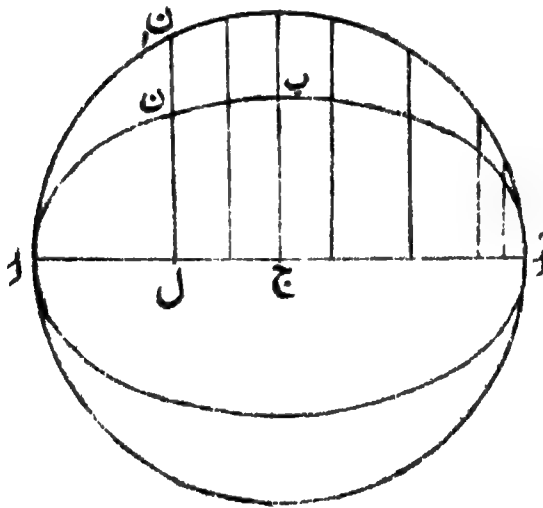
- ۱۔ اگر $B : C : B$ پر عمود N نکالا جائے تو ثابت کرو کہ
 $N : M : B = M : B : C$ جہاں $B : C$: B
- ۲۔ بیلیجی پر دو نقطے N اور Q ہیں، Q اور Q' ،
 N یا N' ل مدودہ کو بالترتیب M اور M' پر قطع کرتے
ہیں ثابت کرو کہ

$$ن ل = م ل \times م پ$$

مسئلہ ۴

اگر او کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے اور اس دائرہ کے معینوں کو نسبت ج ا : ج ب میں کم کر دیا جائے تو ان کے سروں کا طریق قطع ناقص ہوگا

$$(ن ل : ن ل = ج ب : ج ا)$$



فرض کرو کہ او کے نصف قطریہ دائرہ او ن بنایا گیا ہے اور ن کا معین ن ن ل ہے جو طبعی کون پر ملتا ہے۔

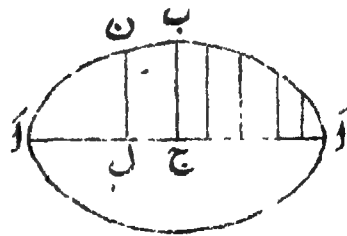
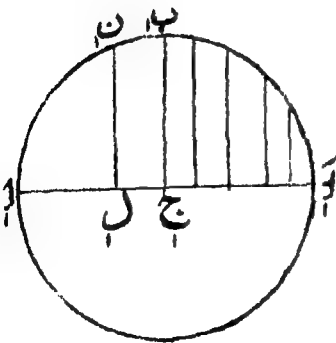
$$ن ل : او ل = ج ب : ج ا [مسئلہ ۳]$$

لیکن $ن ل = ل ل \times ل ل$ [اقیدس م ۳ ش ۵]
 : ن ل : ن ل = ج ب : ج ا
 یعنی ن ل : ن ل = ج ب : ج ا
 تعریفات ۱۔ ہو دائرہ ل ل کے قطر پر بنایا جائے
 اس کو امدادی یا معاون دائرہ کہتے ہیں
 ۲۔ اگر نقاط ن اور ن ملیجی اور امدادی دائرہ کے
 مشترک معین پر واقع ہوں تو وہ نظیری نقطے
 کہلاتے ہیں۔

۳۔ ملیجی کے ایک وتر اور امدادی دائرہ کے ایک
 وتر دونوں کو نظیری وتر کہینگے اگر ان کے سر
 نظیروں نقطے ہوں۔

مسئلہ ۵

دائرہ کا ظل قطع ناقص ہوتا ہے



فرض کرو کہ دائرہ معلومہ ۱۰ ۱۱ ہے جس کا
قطر ۱۰ بنیادی خط کے متوازی ہے اور
جس میں نصف قطر $ج ب$ ۱۰ پر عمود ہے،
نیز فرض کرو کہ کسی نقطہ $ن$ سے ۱۰ پر عمود
 $ن ل$ نکالا گیا ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ ۱۰ ۱۱ کا ظل ۱۰ ۱۱ ہے
اور نقاط ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ کے ظل ۱۰ ۱۱
 $ج$ $ن$ $ل$ ہیں

تب $ن ل = ۱۰ ل \times ۱۰ ل$ [اقلیدس م ۳ ش ۳ اور ۳]

$ن ل = ج ب = ۱۰ ل \times ۱۰ ل : ج ۱۰$

لیکن $ن ل : ج ب = ن ل : ج ب$ [مسئلہ ج]

اور $۱۰ ل \times ۱۰ ل : ج ۱۰ = ۱۰ ل \times ۱۰ ل : ج ۱۰$

$ن ل : ج ب = ۱۰ ل \times ۱۰ ل : ج ۱۰$

نیز $ن ل$ اور $ج ب$ خط ۱۰ پر عمود ہیں [مسئلہ ۱]

اس لئے ثابت ہوا کہ $ن$ کا طریق ایک بیلیجی

ہے جس کے محور $ج ۱۰$ اور $ج ب$ ہیں [مسئلہ ۲]

نوٹ دائرہ ۱۰ ۱۱ امدادی دائرہ کے مساوی ہے۔

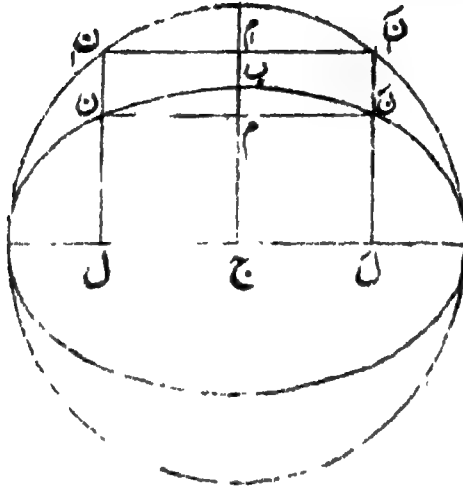
نسبت $ج ب : ج ۱۰ = جم$ جہاں $جم$ زاویہ تطیل ہے

بیلیجی کا رقبہ $= \pi \times ج ۱۰ \times ج ب$

مسئلہ ۶

ثابت کرو کہ قطع ناقص بلحاظ محور اصغر کے متشاکل ہے

اور اس کا ایک اور ماسکہ (س) ہے اور ایک اور مرتب بھی ہے۔



فرض کرو کہ ن م اندازی دائرے کا وتر ہے جو محور اصغر کو نقطہ م پر قطع کرتا ہے اور اس سے زاویہ قائمہ بناتا ہے۔ ن ل اور ن م کے نظیری نقاط ن اور ن ل اور مشترک معین ن ل اور ن م کیونچو ن ل کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ محور اصغر کو م پر قطع کرتا ہے

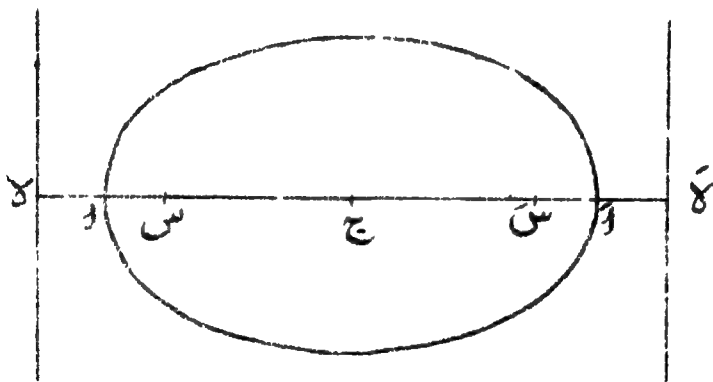
تب $\text{ن ل} = \text{ن ل}$ [اقلیدس م اش ۳۲]

$\text{ن ل} = \text{ن ل}$ [مسئلہ ۴]

اس لئے ن ل کے متوازی ہے اور جب سے زاویہ قائمہ بناتا ہے

نیز $\text{ن م} = \text{ن م}$ [اقلیدس م ۳ ش ۳]

ن م = ن م [اقلیدس م اش ۳۴]
 اس لئے اگر قطع ناقص پر کوئی نقطہ ن ہو تو اس کے
 مقابل لازماً ایک اور نقطہ ن ملیجی پر ایسا ہے کہ
 ن اور ن کو ملانے والا خط محور اصغر سے زاویہ
 قائمہ بناتا ہے۔ اور اس پر دو مساوی حصوں میں
 تقسیم ہو جاتا ہے یعنی معلوم ہوا کہ ناقص بلحاظ محور
 اصغر کے متشکل ہے۔



پس ج س کو ج س اور ج لا کو ج لا کے
 مساوی قطع کرو اور لا میں سے ایک خط ایسا کھینچو
 جو لا پر عمود ہو، ظاہر ہے کہ اگر یہ خط مرتب ہو
 اور س س ماسکے اور خروج المرکز کی وہی قیمت ہو جو
 پہلے تھی تو بھی قطع ناقص مرتسم ہو سکتا ہے

مشقی مثالیں مسئلہ ۴

- ۱۔ ایک مستقیم خط بیلی کو دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کر سکتا
- ۲۔ اُن سب خطوط میں سے جو مرکز کو منحنی کے کسی نقطہ سے ملاتے ہیں ج ۱ سب سے بڑا ہے اور ج ب سب سے چھوٹا ہے۔
- ۳۔ دو نظیری نقطے ن اور ق بالترتیب بیلی اور امدادی دائرہ پر واقع ہیں، نقطہ ن میں سے ایک خط ک ن ل ایسا کھینچا گیا ہے جو محوروں کو نقاط ک اور ل پر ملتا ہے اور ان سے وہی زاوے بناتا ہے جو خط ج ق بناتا ہے، ثابت کرو کہ ک ل کا طول مستقل ہے
- ۴۔ محور اصغر کو قطر مانکر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے اور بیلی پر کے کسی نقطہ ن سے ب ب پر عمود ن م نکالا گیا ہے، اگر یہ عمود دائرہ مذکورہ کو نقطہ ن پر ملے تو ثابت کرو کہ

$$ن م : ن م = ج ۱ : ج ب$$

- ۵۔ اگر ایک سلاح اس طرح حرکت کرے کہ اس کے سرے ہمیشہ دو ثابت مستقیم خطوں پر رہیں اور یہ خط ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں تو ثابت کرو کہ سلاح

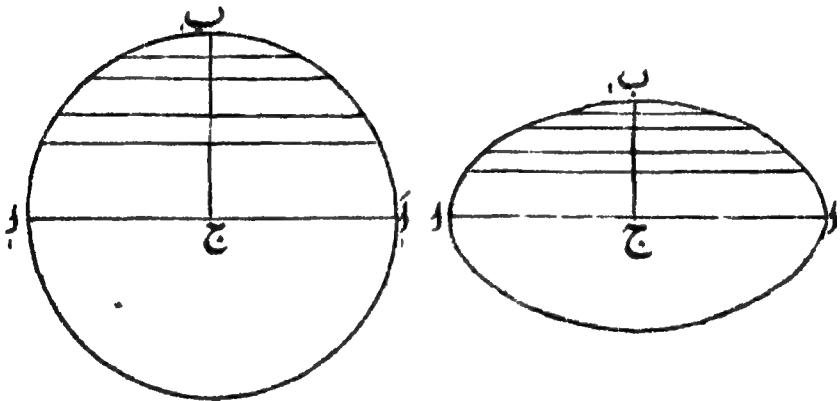
پر کا کوئی نقطہ ایک قطع ناقص مرتسم کریگا۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۵

قطع ناقص کا ظل دائرہ ہو سکتا ہے

مسئلہ ۶ (متبادل ثبوت)

فرض کرو کہ AB ایک دائرہ ہے اور AB اس کا
قطر ہے

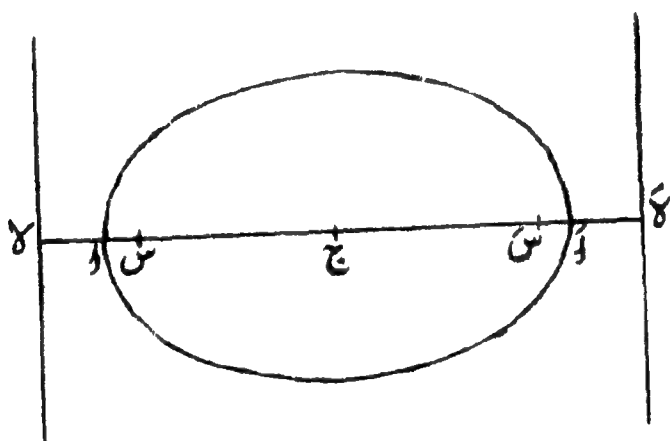


ج ب دائرہ کے ان سب وتروں کی تنصیف کرتا
ہے جو AB کے متوازی ہیں [اقلیدس م ۳ ش ۳]
اس لئے ج ب بیلی کے ان سب وتروں کی تنصیف
کرتا ہے جو AB کے متوازی ہیں [مسئلہ ج]
اور ج ب ان سب وتروں پر عمود ہے جنکی

یہ تنصیف کرتا ہے [مسئلہ س] اس لئے ایللی بلیٹ بلحاظ محور اصغر کے متشاکل ہے اور مرکز کے دوسری طرف اس کا دوسرا ماسکہ اور دوسرا مرتب دونوں واقع ہیں جن کی مدد سے ایللی مرتب ہو سکتا ہے۔

مسئلہ ۷

$$ج ۱ = ر \times ج لا، ج س = ر \times ج ا، ج س \times ج لا = ج ا$$



$$س ۱ = ر \times لا \quad [بموجب تعریف]$$

$$س ا = ر \times لا \quad [بموجب تعریف]$$

جمع کرنے سے

$$س ۱ + س ا = ر (لا + لا) = ر (لا + لا) = ر ۲ لا$$

$$\therefore ج ۱ = ر \times ج لا \quad (۱)$$

تفریق کرنے سے

$$س س = ر \times د$$

$$ج س = ر \times ج د \dots\dots (۲)$$

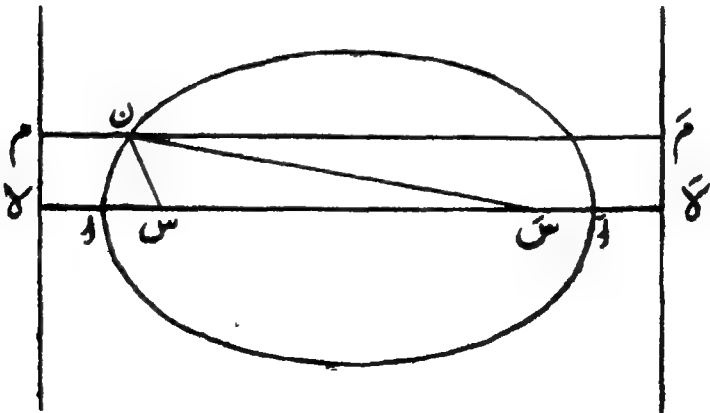
$$ج س \times ج لا = ج د \dots\dots (۳)$$

مشقی مثالیں مسئلہ ۷

قطع ناقص اور اس کا ایک ماسکہ دیا ہوا ہے، مرکز اور خروج المركز دریافت کرو

مسئلہ ۸

س ن + س ن = د
ایلیجی کو مرتب کرنے کی آلی ترکیب



مرتبوں پر عمود م ن م کھینچو

تب س ن = ر × ن م

س ن = ر × ن م

∴ س ن + س ن = ر × م م

ر × لا لا =

لا لا =

اس لئے اگر س اور س پر دو چھوٹی کھونٹیاں ہوں اور رسی کا ایک بند طلقہ ان کے گرد گزرتو ایک پنسل کا سر 'ن' جو طلقہ کو خوب کس کر کھینچے رکھے ایک ایسے قطع ناقص کو مرتسم کرے گا جس کے ماسکے س اور س ہوں گے۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۸

۱۔ اگر ن کوئی نقطہ ہو تو س ن + س ن بڑا ہوگا لا سے اگر ن بیلیجی کے باہر ہو اور مساوی ہوگا اگر ن بیلیجی پر ہو اور چھوٹا ہوگا اگر ن بیلیجی کے اندر ہو۔

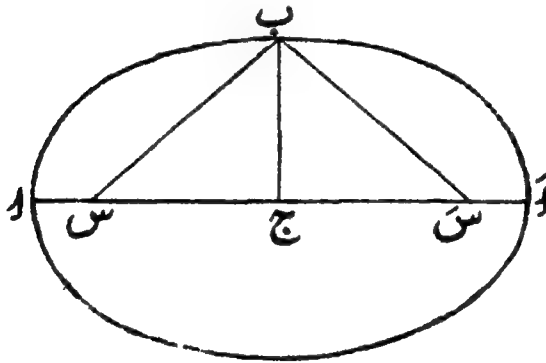
۲۔ ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے بالکل اندر کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ ایک ایسے نقطہ کا مقام جو دونوں دائروں کے محیطوں سے مساوی فاصلہ پر ہو ایک بیلیجی ہے۔

۳۔ دو بیلی خطوں کا ماسکہ مشترک ہے اور ان کے اعظم محور مساوی ہیں ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے کو دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کر سکتے۔

۴۔ ثابت کرو کہ جو مستقیم خط $ن س$ اور $ن س$ کے خارجی زاوے کی تنصیف کرتا ہے وہ قطع ناقص کو دوبارہ نہیں قطع کر سکتا۔

مسئلہ ۹

ج ب = ج ڈ - ج س = س ۱ × س ۲



س ب + س ب = ۱ ۲ [مسئلہ ۸]
 لیکن س ب = س ب [اقلیدس م اش ۴]
 س ب = ج ۱
 ج ب = س ب - ج س [اقلیدس م اش ۴]

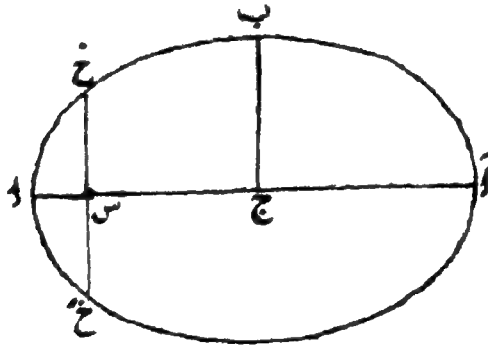
$$= ج ا - ج س$$

$$= س ا \times س و [اقلیدس م ۲ ش ۵]$$

تعریف ماسکہ میں سے گزرنے والے دو محکمے
معین کو ہم وتر خاص (خ خ) کہیں گے۔

مسئلہ ۱۰

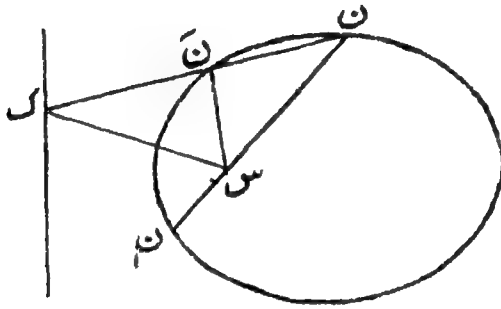
ثابت کرو کہ نیم وتر خاص س خ، ج ا اور ج ب
کا قیسا متناسب ہے یعنی س خ \times ج ا = ج ب



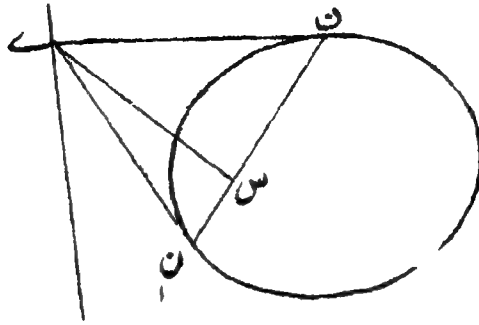
س خ : اس \times اس = ج ب : ج و [مسئلہ ۳]
لیکن اس \times اس = ج ب : ج و [مسئلہ ۹]
س خ : ج ب = ج ب : ج و
س خ : ج ب = ج ب : ج و
س خ \times ج ا = ج ب

مسئلہ ۱۱

اگر N پر کا محاس مرتب کو E پر ملے تو ثابت کرو کہ زاویہ N S E قائمہ ہے۔
 نیز ثابت کرو کہ ایک ماسکی وتر کے سروں پر کے محاس ایک دوسرے کو مرتب پر قطع کرتے ہیں



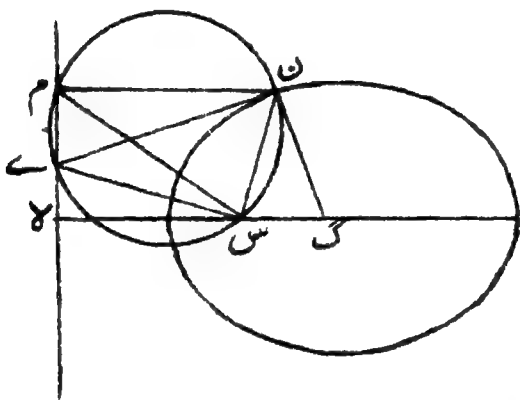
ایلیجی پر کے نقطہ N کے قریب ایک نقطہ N' لو اور فرض کرو کہ وتر NN' مرتب کو K پر ملتا ہے،
 N S کو N تک خارج کرو
 تب K S زاویہ N S N' کی تنصیف کرتا ہے [مسئلہ ۲]



جب 'ن' پر منطبق ہوتا ہے جس وقت
 'ن' کا مماس 'ن' سے بن جاتا ہے اسوقت
 زاویہ 'ن' 'س' 'ن' دو قائموں کے برابر ہوتا ہے
 اس لئے زاویہ 'ن' 'س' سے قائم ہے
 اسلئے 'س' 'ن' زاویہ قائم ہے اور 'س' 'ن'
 نقطہ 'ن' پر کا مماس ہے یعنی 'ن' اور 'ن' پر کے
 مماس ایک دوسرے کو مرتب پر قطع کرتے ہیں
 ۱۔ وتر خاص کے سروں پر کے مماس ایک دوسرے
 کو نقطہ 'ن' پر قطع کرتے ہیں
 ۲۔ اگر بیلیجی کے کسی نقطہ 'ن' میں سے محور پر عمود
 'ق' 'ن' نکالا جائے اور یہ عمود رخ پر کے
 مماس کو 'ق' پر اور محور کو 'ل' پر ملے تو ثابت
 کرو کہ $ق ل = س ن$
 ۳۔ بیلیجی کے کسی نقطہ 'ن' پر کا مماس کیچو

۴۔ نقطہ ب پر ماس کھینچنے سے ثابت کرو کہ
 $ج س \times ج لا = ج ا$

مسئلہ ۱۲
 اگر ن پر کا عاد محور اعظم کو گ پر ملے تو ثابت کرو کہ
 $س گ = ر \times س ن$



ماس ن سے کھینچو ، س سے کو ملاؤ ، مرتب
 پر عمود ن م کھینچو اور س م کو ملاؤ
 سے م ن اور سے س ن زاوے قائمے ہیں [مسئلہ ۱۱]
 اس لئے اگر سے ن کے قطر پر ایک دائرہ کھینچا
 جائے تو یہ م اور س میں سے گزریگا [اقیدس م ۳ ش ۱۳]
 چونکہ سے ن گ زاویہ قائمہ ہے اس لئے ن گ
 دائرہ کو مس کرتا ہے [اقیدس م ۳ ش ۱۶]
 اس لئے زاویہ س ن گ = زاویہ س م ن جو

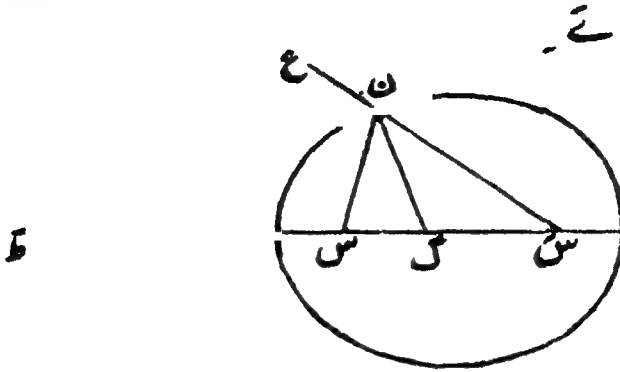
دائرہ کے متبادل قطعہ میں واقع ہے [اقلیدس م ۳۲ ش ۳۲]
 نیز زاویہ ن س گ = زاویہ س ن م [اقلیدس م ۱۷ ش ۲۹]
 اس لئے مثلث س ن گ اور ن م س متشابه ہیں
 \therefore س گ : س ن = س ن : ن م
 \therefore س گ = ر x س ن

مشقی مثالین مسئلہ ۱۲

- ۱۔ ملیلی پر کوئی نقطہ ن ہے اور محور اعظم پر ایک ثابت نقطہ م ہے ، اگر م سے ن پر کے تماس پر ایک عمود کھینچا جائے تو جس نقطہ پر یہ عمود سمتی قطر س ن کو ملتا ہے اس کا طریق دریافت کرو۔
- ۲۔ اگر گ د ، س ن پر عمود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ نسبت ن ل : گ د مستقل ہے اور ن د = نیم وتر غا
- ۳۔ اگر ن گ مدودہ محور اصغر کو گ پہ لے تو گس مدودہ مرتبہ کو م پہ ملیگا جہاں م پائین اس عمود کا ہے جو نقطہ ن سے مرتبہ پر نکالا جائے

مسئلہ ۱۳

ملیلی کے کسی نقطہ ن پر کے تماس اور عماد کی فاصلوں کے درمیانی زاویہ کے بالترتیب خارجی اور داخلی منصف ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ ط ن عے ماس ہے اور ن گ عماد ،
 س گ = ر × س ن [مسئلہ ۱۲]
 س گ = ر × س ن
 اس لئے س گ : س گ = س ن : س ن
 اس لئے ثابت ہوا کہ ن گ زاویہ س ن س کی
 تنصیف کرتا ہے [اقلیدس م ۶ ش ۲]
 اس لئے ان زاویوں کے متمم زاویے س ن ط اور
 س ن عے مساوی ہیں لیکن زاویہ س ن عے =
 زاویہ ع ن ط
 اس لئے ن ط خارجی زاویہ س ن ع کی تنصیف
 کرتا ہے

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۳

۱۔ اگر ن پر کے ماس پر عمود س ما نکلا جائے اور یہ

عمود، $سن$ محدودہ کو $س$ پر ملے تو ثابت کرو کہ (۱) $س$ ماس $سن$ (۲) $سن = ن = س$ (۳) $سن = س$ اگر $ن$ قطع ناقص پر حرکت کرے تو $س$ کا طریق دریافت کرو
نوٹ - ربط (۱) کی وجہ سے $س$ کو ماسک کا عکس بلحاظ $ماس$ کے کہتے ہیں

۲- $ماس$ اور عماد محور اصغر کو بالترتیب نقاط $ط$ اور $گ$ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ اگر $گ$ $ط$ کے قطر پر ایک دائرہ کھینچا جائے تو وہ نقطہ $ن$ اور دونوں ماسکوں میں سے گزریگا
۳- اگر $ن$ پر کا عماد محور اعظم کو $گ$ پر اور اصغر کو $گ$ پر ملے تو ثابت کرو کہ مثلث $سن$ $ن$ $گ$ اور $گ$ $ن$ $سن$ متشابه ہیں

۴- $سن \times سن = ن \times گ$
۵- ثابت کرو کہ قطع ناقص کے مرکز میں سے سوائے ان عمادوں جو محورون کے سروں پر کھینچے جائیں اور کوئی عماد نہیں گذر سکتا۔

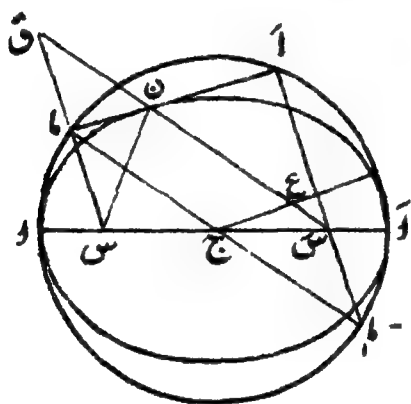
۶- ایک دائرہ قطع ناقص کے ماسکوں میں سے گذرتا ہے، دائرہ اور محور اصغر کے ایک نقطہ تقاطع میں سے ایک مستقیم خط کھینچا گیا ہے جو اس نقطہ کو دائرہ اور قطع ناقص کے نقطہ تقاطع سے وصل کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خط قطع ناقص کو $س$ کرتا ہے

مسند ۱۴

اگر قطع ناقص کے ماسکون سے ن پر کے ماس پر عمود
(س س ، س س ، س س) کھینچے جائیں تو ان کے پائین

امدادی دائرہ پر واقع ہوں گے

نیز اگر ج ع ، ن پر کے ماس کے متوازی
کھینچا جائے اور س ن کو نقطہ ع پر قطع کرے تو ن ع = ج ۱
نیز س ما x س ما = ج ب



س ن اور س ما کو اتنا خارج کرو کہ وہ نقطہ ق
پر طین، ج ما کو ملاؤ مثلثات مان س اور
مان ق میں مان مشترک ہے، ن ماس اور
ن ماق زاوے قائمے ہیں، زاویہ مان س = زاویہ
مان ق

[مسئلہ ۱۳]

∴ سن = ن ق ، س ما = ما ق [اقیدس م اش ۳۱]

اور س ج = ج س اس لئے س ق متوازی
 ہے ج ماکے [اقلیدس م ۶ ش ۲]
 ج م = $\frac{1}{4}$ س ق [اقلیدس م ۶ ش ۲]
 = $\frac{1}{4}$ (س ن + ن س) = $\frac{1}{4}$ [مسئلہ ۸]
 ج ۱

اس لئے مامدادی دائرہ پر واقع ہے
 اسی طرح سے مابھی امدادی دائرہ پر واقع ہے
 نیز ماجع ن ایک متوازی الاضلاع ہے اسلئے
 ن ع = ج م = ج ۱

ماس کو اتنا خارج کرو کہ وہ دائرہ کو لم پر لے ،
 مام کو ملاؤ اب چونکہ مامام زاویہ قائمہ ہے
 اس لئے مام مرکز ج میں سے گزرتا ہے [اقلیدس م ۳ ش ۱]
 س م = س م [اقلیدس م ۱ ش ۳]

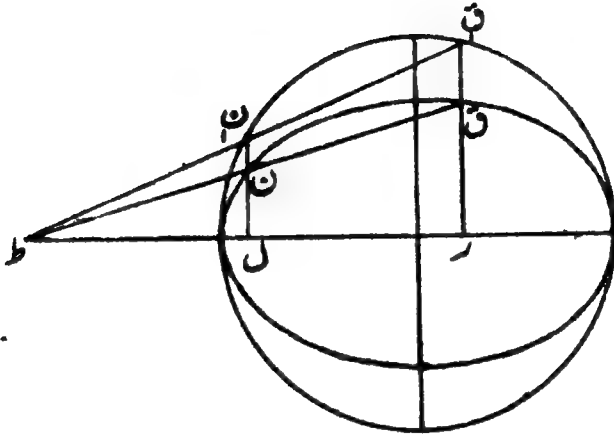
س م x س م = س م x س م
 = س م x س م [اقلیدس م ۳ ش ۳۵]
 ج ب = [مسئلہ ۹]

مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ (۸۱)

مسئلہ ۱۵

ثابت کرو کہ قطع ناقص اور امدادی دائرہ کے نظیری وتر
 ایک دوسرے کو محور اعظم پر قطع کرتے ہیں

نیز اگر نظیری نقطوں پر ماس کیجئے جائیں تو وہ بھی ایک دوسرے کو محور اعظم پر قطع کریں گے۔



فرض کرو کہ قطع ناقص کا وتر ن ق محور اعظم کو نقطہ

ط پر ملتا ہے

فرض کرو کہ امدادی دائرہ پر ن کا نظیری نقطہ ن ہے۔ ط کو ملاؤ اور اس کو اتنا خارج کرو کہ وہ

معین ر ق ممدودہ کو ق پر ملے

تب ق ر : ن ل = ر ط : ل ط [اقیڈس ۴ ش ۴]

= ق ر : ن ل [اقیڈس ۴ ش ۴]

ن ق ر : ق ر = ن ل : ل ط

= ر ج : ب ج [مسئلہ ۴]

اس لئے ق اور ق نظیری نقطے ہیں اور اسلئے معلوم ہوا کہ نظیری وتر ن ق، ن ق محور کو ایک

ہی نقطہ ط پر ملتے ہیں۔
 اگر ق حرکت کر کے ن پر منطبق ہو جائے تو ق
 حرکت کر کے ن پر منطبق ہو جائے گا۔ اس وقت
 ن ط اور ن ط بالترتیب قطع ناقص اور دائرہ کے
 مماس بنجائیں گے۔ پس معلوم ہوا کہ اگر نظیری
 نقطوں پر مماس کھینچے جائیں تو وہ ایک دوسرے
 کو محور اعظم پر قطع کریں گے۔

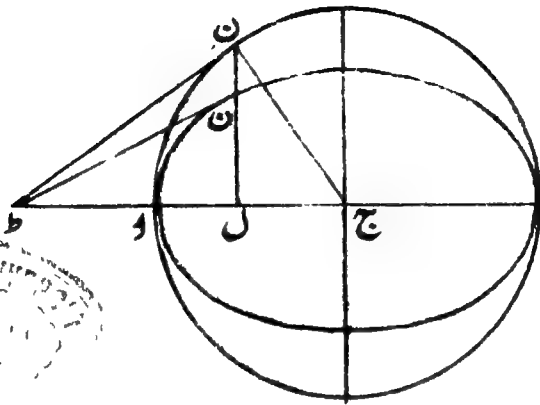
مشقی مثالیں مسئلہ ۱۵

۱۔ ن اور ن نظیری نقطے ہیں، ن پر کا مماس جب
 محدودہ کو ک پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ $ج ک \times ن ل = ج \times بیج$
 ۲۔ وق اور وق قطع ناقص کے دو مماس ہیں اور ول
 محور پر عمود ہے، ثابت کرو کہ اگر نظیری نقاط ق اور ق
 پر امدادی دائرہ کے مماس کھینچے جائیں تو وہ ایک دوسرے
 کو ول پر ملیں گے نیز ثابت کرو کہ اگر ق ق محدودہ
 محور اعظم کو ط پر ملے تو

$$ج ل \times ج ط = ج ج$$

مسئلہ ۱۶

اگر ن پر کا مماس محور اعظم محدودہ کو ط پر ملے تو
 $ج ل \times ج ط = ج ج$



ل ن کو اتنا خارج کرو کہ وہ امدادی دائرہ کو ن پر ملے اور ن، ط، ن، ج کو ملاؤ۔

ن، ط دائرہ کو مس کرتا ہے [مسئلہ ۱۳]

اس لئے ج ن ط زاویہ قائمہ ہے [اقیڈس ۳ ش ۸]

∴ ج ل × ج ط = ج ن [اقیڈس ۶ ش ۸]

$$ج = ج ن$$

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۴

۱۔ ایک دے ہوئے مستقیم خط کے متوازی قطع ناقص کا تماس کیجیو۔

۲۔ اگر ج میں سے ایک مستقیم خط تماس کے متوازی کھینچا جائے اور وہ س ن اور س ن کو بالترتیب ع اور غ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ

$$ن ع = ن غ$$

۳۔ ثابت کرو کہ $س ع = س ع$
 ۴۔ اگر $س ن$ کو قطر مانکر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ امدادی دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۵۔ $س ک$ ، $س ن$ کے متوازی ہے اور $م ا ک$ ، $س ک$ پر عمود ہے، ثابت کرو کہ جس مکانی کا ماسکہ $س$ ہو اور $ر ا س ک$ ، وہ قطع ناقص کو مس کرتا ہے۔

۶۔ قطع ناقص کے ماسکہ اور $م ا س$ کے مقام معلوم ہیں اور محور اصغر کا طول بھی دیا ہوا ہے، دوسرے ماسکہ کا طریق دریافت کرو ؟

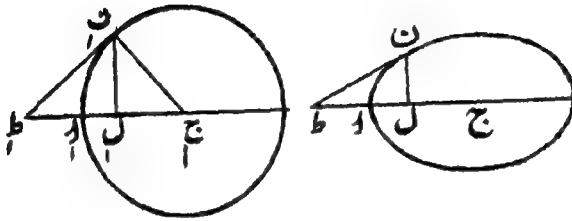
۷۔ اگر ایک دائرہ کے ایک وتر کے محاذی ایک نقطہ معینہ پر زاویہ قائمہ بنے تو ثابت کرو کہ یہ وتر ایک ایسی مخروطی تراش کو لف کرتا ہے جس کا ایک ماسکہ نقطہ معینہ ہے اور دوسرا ماسکہ دائرہ کا مرکز ہے۔

۸۔ اگر قطع ناقص کا ایک اور $م ا س$ ، $م ا ن$ مآ کو زاویہ قائمہ پر قطع کرے اور نقطہ تقاطع $و$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$و م ا \times و م ا = ب ج$$

اس نئے ثابت کرو کہ $ج و = ج ڈ + ج ب$
 [قطع ناقص کے جو $م ا س$ ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کریں ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہوتا ہے جس کو مرتب دائرہ کہتے ہیں۔]

مسئلہ ۱۶ (متبادل ثبوت)



وہ دائرہ کیچھو جس کا ظل بنانے سے قطع ناقص حاصل ہوا ہے اور فرض کرو کہ
ج، ن، ط، ل، ط کے ظل ج، ن، ط، ل، ل
ہیں۔

اب ن، ط دائرہ کو مس کرتا ہے [مسئلہ ۵]
اسلئے ج، ن، ط زاویہ قائمہ ہے [اقیدہ ۳۳ ش ۸]
اور ج، ل، ن زاویہ قائمہ ہے [مسئلہ ۳]
∴ ج، ل، ج = ج، ن، ج
∴ ج، ل، ج = ج، ط، ج
∴ ج، ل، ج = ج، ط، ج [اقیدہ ۳۴ ش ۸]
[مسئلہ ۱۶]

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۶

۱۔ امدادی دائرہ پر ن کا نظیری نقطہ ن ہے، ن پر
کے مماس پر عمود س ل کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ

س ب = س ن

۲۔ ثابت کرو کہ کوئی دائرہ جو ل اور ط میں سے گزرتا ہے امدادی دائرہ کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتا ہے۔

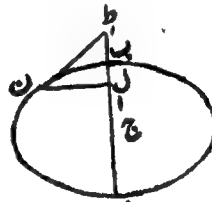
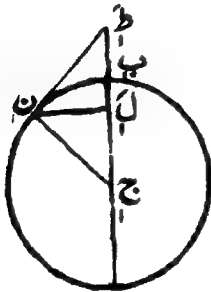
۳۔ اگر قطع ناقص کے کسی نقطہ ن پر مماس کھینچا جائے اور اس پر مرکز اور محور اعظم کے ایک سرے سے عمود ج ما اور لے نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$ج ل \times لے = ج ما \times ل$$

مثلاً،

اگر ن پر کا مماس محور اصغر محدودہ کو ط پر ملے اور نقطہ ن سے محور اصغر پر عمود ن ل نکالا جائے تو ثابت کرو کہ

$$ج ن \times ج ط = ج ب^2$$



وہ دائرہ کھینچو جس کا ظل قطع ناقص ہو۔ اور فرض کرو کہ نقاط ج، ن، ط، ب، ل کے ظل

ج، ن، ٹ، ب، ل ہیں۔

ج ن کو ملاؤ تب ن ط دائرہ کو مس کرتا ہے [مسئلہ]

اس لئے ج، ن، ط، زاویہ قائمہ ہے [اقیدہ ۳۴ ش ۱۸]

نیز ج ک ن زاویہ قائمہ ہے [مسئله]

∴ ج ن ج × ج ط = ج ن

$$= \text{ج. ب.}$$

ج ل ج = ج ب [مطلب]

محورون پر عمود ن ل ر اور ن ل ر کھینچو اور فرض کرو کہ وہ ج ف کو ر اور ل پر ملے ہیں نیز فرض کرو کہ ن پر کا مماس محورون کو ط اور ط پر ملتا ہے چونکہ ل اور ف پر کے زاوے قائمے ہیں۔ اسلئے گ ل ر اور ن کے گرد ایک دائرہ بن سکتا ہے

[اقلیدس م ۳ ش ۳۱]

ن ف × ن گ = ن ل × ن ر [اقلیدس م ۳ ش ۳۶]

= ج ل × ج ط [اقلیدس م ۱ ش ۳۲]

= ج ب [مسئلہ ۱۸]

اسی طرح سے ن ف × ن گ = ن ل × ن ر

= ج ل × ج ط [اقلیدس م ۱ ش ۳۲]

= ج ب

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۸

۱۔ اگر گ سے س ن یا س ن ممدودہ پر ایک عمود

گم ک نکالا جائے تو ثابت کرو کہ ن ک = ج ب

۲۔ اگر ن پر کا مماس محور اعظم کو نقطہ ط پر ملے تو

ج ف × ن ط اُن عمودوں کے حاصل ضرب کے مساوی

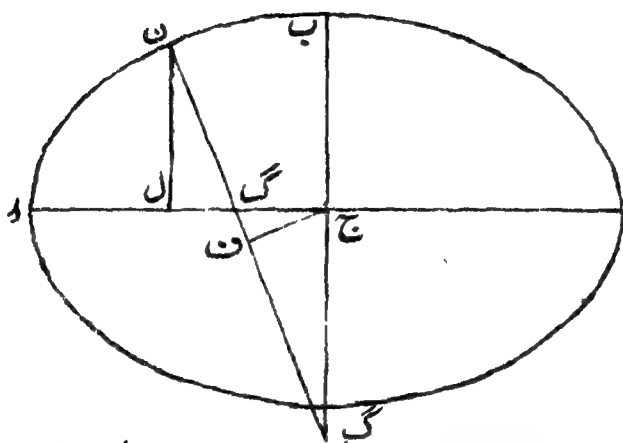
ہوگا جو ماسکوں سے ن پر کے عماد پر نکالے جائیں۔

مسئلہ ۱۹

گ ل : ج ل = ج ب : ج ا

ج گ = ر ا × ج ل

نیز



ن گ کو اتنا خارج کرو کہ وہ محور اصغر کو گ پر ملے
اور ج ن کون پر کے مماس کے متوازی کھینچو اور
فرض کرو کہ یہ ن گ کون پر ملتا ہے۔

تب گ ل : ج ل = ن گ : ن گ [اقلیدس م ۲ ش ۲]

= ن ن × ن گ : ن ن × ن گ

= ج ب : ج ا [مسئلہ ۱۸]

نیز ج ل - گ ل : ج ل = ج ا : ج ب

ج گ : ج ل = ج س : ج ا [مسئلہ ۱۸]

ج گ = ر ا × ج ل [مسئلہ ۱۸]

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۹

۱۔ اگر ن پر کا ماس اور عا د محور اعظم اور محور اصغر کو بالترتیب
نقاط ط ، ط ، گ ، گ پر ملیں تو ثابت کرو کہ

$$(۱) ج گ \times ج ط = ج س^۲$$

$$(۲) ج گ \div ج ط = ج س^۲$$

(۳) ط گ اور ط گ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں

$$۲۔ ثابت کرو کہ ل گ \times ج ط = ج ب^۲$$

۳۔ اس مسئلہ سے قطع مکانی کے لئے ایک متماثل

مسئلہ مستنبط کرو یعنی ثابت کرو کہ ل گ = ۱۲ س

۴۔ قطع ناقص پر ایک ایسا نقطہ ن دریافت کرو کہ

ن گ خطوط ج ن اور ن ل کے درمیانی زاویہ کی

تضعیف کرے۔

مسئلہ ۲۰

اگر قطع ناقص کے ایک نقطہ ن پر ماس کھینچا

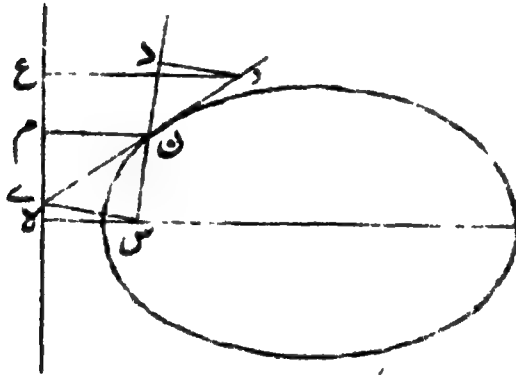
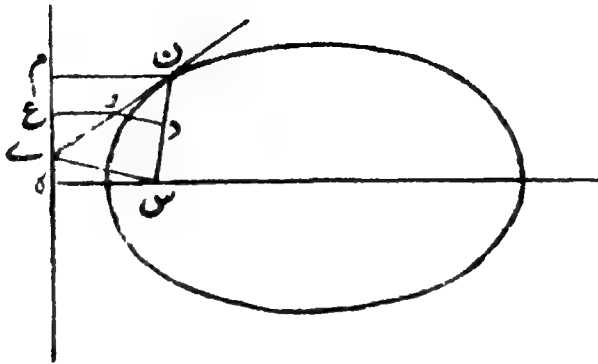
جائے اور ماس پر کے کسی نقطہ و سے مرتب

پر عمود و ع اور س ن پر عمود و د نکالا

جائے تو ثابت کرو کہ س د = ر \times و ع

[اس خاصیت کو انگریزی مہندس

آدم سے منسوب کرتے ہیں]



س سے کو ٹاؤ اور مرتب پر عمود ن م کھینچو
زاویہ سے س ن قائمہ ہے [مسئلہ ۱۱]

ن سے س ، و د کے متوازی ہے

∴ س د : س ن = و : ن [اقیدس ۴ ش ۲]

= و ع : ن م [اقیدس ۴ ش ۳]

س ن = ر × ن م

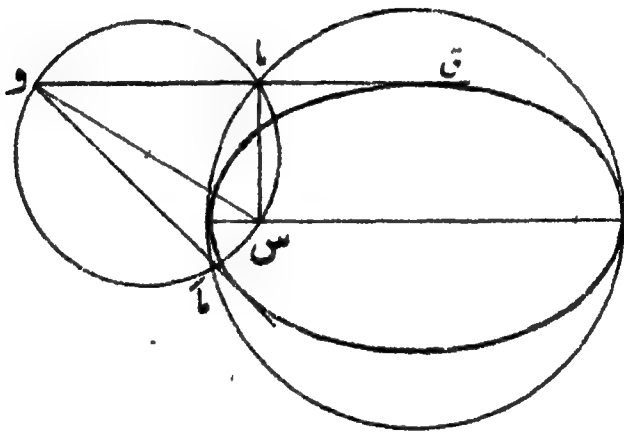
س د = ر × و ع

لیکن

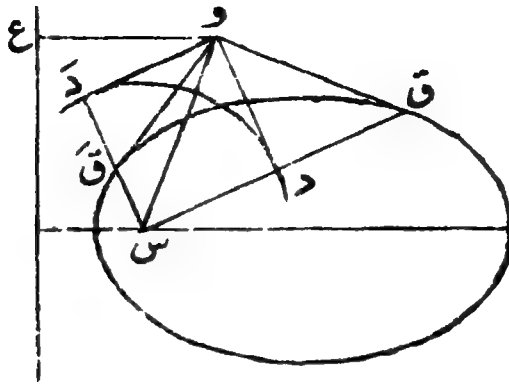
اگر ن پر کا ماس مرتبوں کو سے اور سے پر لے اور نقاط

مرتب پر عمود ق ل نکالو
تب س ق : س د = ق ع : و ع
[اقلیدس م ۲ ش ۲]
= ق ل : و ع
س ق : ق ل = س د : و ع

اس لئے نقطہ ق قطع ناقص پر واقع ہے۔
اور چونکہ زاویہ ق س ع قائمہ ہے اس لئے وق
قطع ناقص کو مس کرتا ہے [مسئلہ ۱۱]
اسی طرح سے دوسرا مس وق کھینچا جاسکتا ہے۔



دوسرا طریقہ وس کو قطران کر ایک دائرہ
کھینچو جو امدادی دائرہ کو نقاط ما اور ما پر ملے ،
تب زاویہ س ما و قائمہ ہے [اقلیدس م ۳ ش ۳]
اور و ما قطع ناقص کو مس کرتا ہے [مسئلہ ۱۲]



س ق ، س ق اور مرتب پر بالترتیب عمود
ود ، ود اور وع کھینچو - وس کو طاء

تب س د = ر x وع [مسئلہ ۲۰]

[مسئلہ ۲۰] س د =

اسلئے ود = ود [اقلیدس م اش ۴]

∴ زاویہ وس د = زاویہ وس د [اقلیدس م اش ۸]

یا زاویہ وس ق = زاویہ وس ق

مشقی مثالین مسئلہ ۲۲

۱- ق ق عمودہ مرتب کوک پر ملتا ہے ، ثابت کرو کہ
وس ک زاویہ قائمہ ہے -

۲- ایک ماسکی وتر کے سروں پر تماس کھینچے گئے ہیں اور
وہ داس پر کے تماس کو ط ، ط پر ملتے ہیں ، ثابت کرو کہ

$$ا ط x ا ط = ا س^2$$

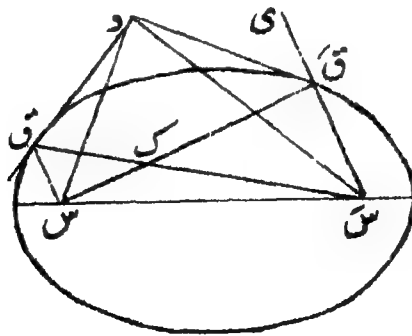
۳۔ وق اور وق قطع ناقص کے دو ثابت مماس ہیں، ایک متغیر مماس، انکو ق، ق پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ زاویہ ق س ق مستقل ہے۔

۴۔ ایک ماسکی وتر کے سروں پر عماد اور مماس کھینچے گئے ہیں، عماد ایک دوسرے کو ہی پر اور مماس سے پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ سے ہی دوسرے ماسکے میں سے گذرتا ہے۔

۵۔ نقطہ سے قطع ناقص کے دو مماس وق اور وق کھینچے گئے ہیں، وس، ق ق کو نقطہ ر پر ملتا ہے، محور کے متوازی خط ر سے کھینچا گیا ہے جو مرتب کو سے پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ق سے اور ق سے محور سے مساوی زاوے بناتے ہیں۔

مسئلہ ۲۳

ایک قطع ناقص کے دو مماس وق اور وق ہیں



ثابت کرو کہ زاویہ س وق = زاویہ س وق
 جہان س اور س ماسکے ہیں
 س ق ، س ق ، س ق کو ملاؤ اور
 س ق کو ی تک خارج کرو اور فرض کرو کہ س ق
 س ق کو ک پر ملتا ہے۔
 تب س وق = س وق می۔ س ق [اقلیدس م اش ۳۲]

= س ق و۔ س ق س ق [مسئلہ ۳۱]

= س ک ق [اقلیدس م اش ۳۲]

اسی طرح سے س وق = س ک ق

س وق = س وق [اقلیدس م اش ۵]

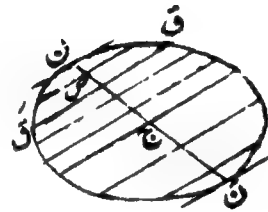
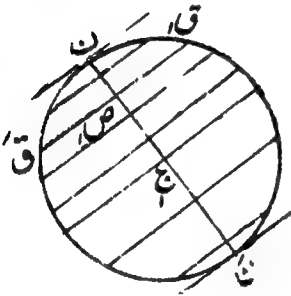
مشقی مثالیں مسئلہ ۲۳

۱۔ قطع ناقص کا ایک ماسکہ اور دو حماس دے ہوئے ہیں،
 مرکز کا طریق دریافت کرو۔

۲۔ حماسات وق ، وق پر طول ور ، و ز بالترتیب
 مساوی وس ، وس کے قطع کئے گئے ہیں، ثابت
 کرو کہ رر قطع ناقص کے محور اعظم کے مساوی
 ہے۔

مسئلہ ۲۴

ایک قطع ناقص کے متوازی وتروں کا ایک نظام دیا ہوا ہے، ثابت کرو کہ وتروں کے وسطی نقاط کا طریق ایک ایسا مستقیم خط ہے جو مرکز میں سے گذرتا ہے، نیز ثابت کرو کہ اگر اس مستقیم خط کے کسی ایک سرے پر ماس کھینچا جائے تو وہ وتروں کے متوازی ہوگا



وہ دائرہ کھینچو جس کا ظل قطع ناقص ہے، ناقص کے متوازی وتروں کا نظام دائرہ کے متوازی وٹرونگے ایک نظام کا ظل ہے اور ناقص کے جو متوازی وتر ہیں ان کے وسطی نقاط دائرہ کے متوازی وٹرونگے وسطی نقاط کے ظل ہیں۔

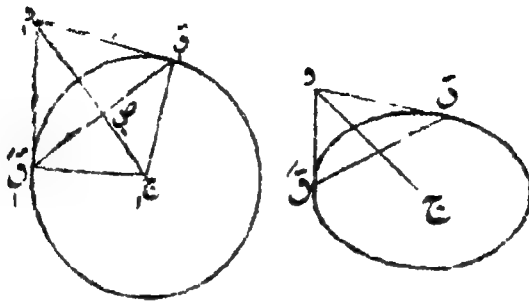
[مسئلہ ب اور ج]

دائرہ کی صورت میں یہ وسطی نقاط ایک ایسے مستقیم

خط ج ص پر واقع ہیں جو مرکز ج میں سے
 گذرتا ہے [اقلیدس م ۳ ش ۳]
 اور ج ص کا ظل ایک مستقیم خط ج ص ہے
 جو قطع ناقص کے مرکز ج میں سے گذرتا ہے [مسئلہ ۱]
 دائرہ کی صورت میں اگر ج ص کے کسی ایک
 سرے پر ماس کھینچا جائے تو وہ وتروں کے
 متوازی ہوگا کیونکہ سب وتر ج ص پر عمود
 ہیں [اقلیدس م ۳ ش ۳ اور ۱۱]
 پس قطع ناقص کی صورت میں بھی یہ خاصیت
 درست ہے [مسئلہ ج ۱]
تعریف اگر متوازی وتروں کا کوئی نظام دیا ہوا ہو تو
 وتروں کے وسطی نقاط کے طریق کو قطر کہتے ہیں۔
 نوٹ۔ الفاظ قطر اور محور بالعموم قطر یا محور کے اس
 طول کو تعبیر کرتے ہیں جو منحنی کے اندر واقع ہو
تعریف اگر قطر (ج ن) وتر (ق ق) کی
 تنصیف کرے تو وتر کے نصف (ق ص) کو
قطر کا معین کہتے ہیں

مسئلہ ۲۵

اگر کسی وتر کے سروں پر ماس کھینچے جائیں تو وہ
 اس قطر پر ملیں گے جو وتر کی تنصیف کرتا ہے



فرض کرو کہ وق اور وق مماس ہیں، ج و کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ ق ق کو ص پر ملتا ہے وہ دائرہ کھینچو جس کا نفل قطع ناقص ہو اور فرض کرو کہ نقاط و، ق، ق، ج، ص بالترتیب نقاط و، ق، ق، ج، ص کے نفل ہیں، ج، ق، ج، ق کو ملاؤ

تب وق، وق، وق دائرہ کو مس کرتے ہیں [مسئلہ ۳۶]
 : وق = وق [اقطیدس م ۳۶]
 : زاویہ وج ق = زاویہ وج ق [اقطیدس م ۸]
 : ق ص = ق ص [اقطیدس م ۲]
 : ق ص = ق ص [مسئلہ ۲۵]

مشقی مثالین ۲۵

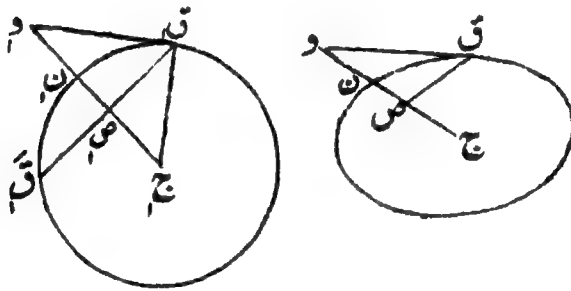
۱۔ قطع ناقص کے ایک نقطہ ن پر کا مماس ۱ پر کے مماس کو ما پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ج ما متوازی ہے

۱ ن کے۔

۲۔ اگر ج ن مرتب کو سے پر ملے تو سے س، ق ق پر عمود ہوگا

مسئلہ ۲۶

قطر ج ن کا معین ق ص ہے، اگر ق پر کا تماس قطر ج ن ممدودہ کو و پر ملے تو ثابت کرو کہ
ج ص \times ج و = ج ن



وہ دائرہ کھینچو جس کا قطر قطع ناقص ہے، فرض کرو نقاط

ج، ق، و، ن، ص بالترتیب نقاط ج، ق، و، ن، ص کے قطر ہیں۔ ج ق کو ملاؤ اور ق، ص کو اتنا خارج کرو کہ وہ دائرہ کو نقطہ ق پر ملے۔

تب و ق، تماس دائرہ ہے [مسئلہ ج]
ق، ق کی تنصیف ص پر ہوتی ہے [مسئلہ ب]

\therefore ج، ص، ق، ایک زاویہ قائمہ ہے [اقلیدس م ۳ ش ۳]
 اور ج، ق، و زاویہ قائمہ ہے [اقلیدس م ۳ ش ۱۸]
 \therefore ج، ص، \times ج، و = ج، ق، [اقلیدس م ۶ ش ۸]
 \therefore ج، ص، \times ج، و = ج، ن،
 ج، ص، \times ج، و = ج، ن، [مسلب آ]

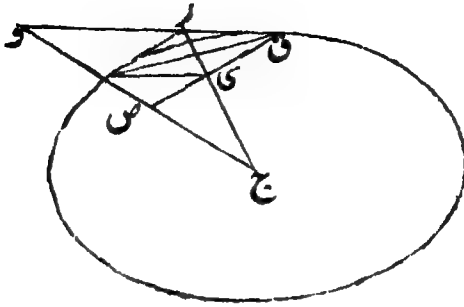
مشقی مثالیں مسئلہ ۲۶

۱- ص، ر، ن، ق کے متوازی کھینچا گیا ہے اور ج، ق کو ر پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن، ر، ق پر کے تماس کے متوازی ہے۔

۲- قطع ناقص کے نقطہ ن پر کا تماس مساوی مزدوج قطرون [دیکھو صفحہ ۱۰۲] کو ط اور ط پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ مثلثات ط ج ن، ط ج ن کی باہمی نسبت ج ط : ج ط ہے۔

مسئلہ ۲۶ [متبادل ثبوت]

نقطہ ن پر تماس کھینچو جو ق و کو ر پر ملے، وق کے متوازی ن ی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ق ص کو ی پر ملتا ہے، ن، ق، ر سی کو ملاؤ۔



تب چونکہ ن ر ق ی متوازی الاضلاع ہے
 ∴ ر ی ، ن ق کی تنصیف کرتا ہے
 ∴ ر ی مرکز میں سے گذرتا ہے [مسئلہ ۲۵]
 ∴ متشابہ مثلثوں سے

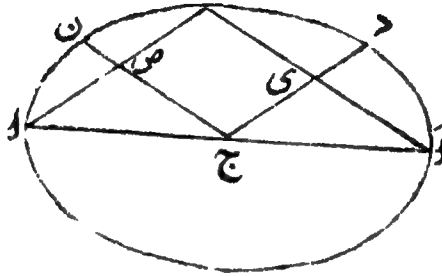
$$\begin{aligned} \text{ج ص} : \text{ج ن} &= \text{ج ی} : \text{ج ر} \\ \text{ج ن} : \text{ج و} &= \\ \text{ج ص} \times \text{ج و} &= \text{ج ن}^2 \end{aligned}$$

مکانی کی صورت میں متماثل مسئلہ کیا ہوگا، اس
 ترکیب ثبوت کو اس صورت میں استعمال کرو،
 سنیت جون کالج کبرج کے ماسٹر نے اس مسئلہ
 کو اس طرح سے ثابت کیا۔

مسئلہ ۲۷

اگر ج د کے متوازی وتروں کی ج ن تنصیف

کرے تو ج ن کے متوازی وترون کی ج د تنصیف
کرے گا



ا ق کو ج د کے متوازی کھینچو۔ اور فرض کرو کہ یہ
ج ن کو ص پر ملتا ہے
تب ا ق کی تنصیف ص پر ہوگی۔
ا ق کو ملاؤ۔ اور فرض کرو کہ یہ ج د کو ص پر
قطع کرتا ہے۔
اب چونکہ ا ق کی تنصیف ص پر ہوتی ہے۔
اور ا ق کی ج پر، اس لئے ا ق، ج ن کے
متوازی ہے۔

اور چونکہ ج د، ا ق کے متوازی ہے اور
ا ق کا نقطہ وسطی ج ہے اس لئے ا ق کی تنصیف
ص پر ہوتی ہے۔

اس لئے ج د ایک ایسے وتر ا ق کی تنصیف
کرتا ہے جو ج ن کے متوازی ہے۔ اس لئے ج د
ان سب وترون کی تنصیف کرتا ہے جو ج ن کے

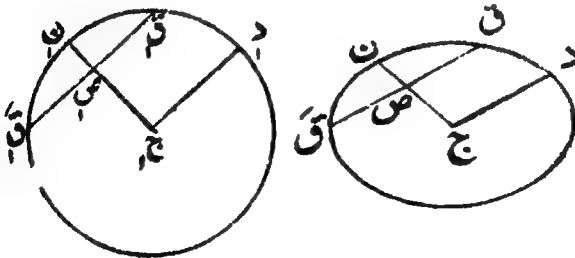
متوازی ہیں۔
تعریف - اگر دو قطروں میں سے ہر ایک ،
دوسرے کے سب متوازی دتروں کی تنصیف
کرے۔ تو ان کو مزدوج قطر کہتے ہیں +
انتباہ۔ ن پر کا ماس ج د کے متوازی ہے
اور د پر کا ماس ج ن کے متوازی ہے [مسئلہ ۲۲]

مشقی مثالین مسئلہ ۲۷

- ۱۔ قطع ناقص کے مساوی مزدوج قطر کھینچو
- ۲۔ ایک مرتب اور دو مزدوج قطر کھینچنے سے ایک
مثلث بنایا گیا ہے اگر اس مثلث کے راسوں میں
سے مقابل کے اضلاع پر عمود کھینچے جائیں تو ثابت کرو
کہ وہ ایک دوسرے سے ماسکے پر ملیں گے۔

مسئلہ ۲۸

قطع ناقص کے مزدوج قطر دائرہ کے قائم الزوایہ قطروں
کے ظل ہوتے ہیں



فرض کرو کہ ج ن ، ج د مزدوج قطر ہیں ، وتر
ق ص ق کو ج د کے متوازی کھینچو اور فرض
کرو کہ اس کی تنصیف ص پر ہوتی ہے ، وہ
دائرہ کھینچو جس کا ظل قطع ناقص ہو اور فرض
کرو کہ نقاط د ، ق ، ن ، ق ، ص ، ج کے ظل
د ، ق ، ن ، ق ، ص ، ج ہیں

ج د متوازی ہے ق ق کے [مسئلہ ج]

اور ق ق کی تنصیف ص پر ہوتی ہے [مسئلہ ب]

∴ ج ص ، ق ق پر عمود ہے [اقیدس م ۳ ش ۳]

ن ج ن ، ج د پر عمود ہے
نوٹ مزدوج قطرون کے طولوں کے متعلق کئی
خواص اس مسئلہ سے مستنبط ہو سکتے ہیں (دیکھو
طریق عمل مسئلہ ۳۰) مثلاً

۱- ن ج ن ، ج د دو مزدوج قطر ہیں اور رکوی
نقطہ قطع ناقص پر ہے - ن ر ، ن ر قطر ج د یا ج د
ممدودہ کو ط اور ط پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ

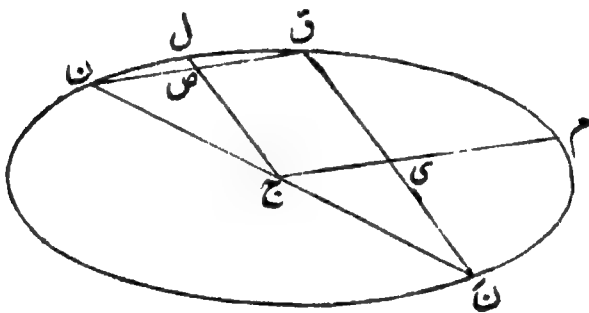
$$ج ط \times ج ط = ج د^2$$

۲- اگر ج ن ، ج د اور ج ق ، ج ر مزدوج
قطرون کے دو زوج ہوں اور اگر ن پر کا ماس ج ق ،

ج ر محدودہ کو ط اور ط پر ملے تو ثابت کرو کہ
 $ن ط \times ن ط = ج د$
تعریف وتر (ق ن، ق ن)، جو قطع ناقص
 پر کے کسی نقطہ (ق)، کو قطر ن ج ن کے سروں
 سے ملاتے ہیں تکمیلی وتر کہلاتے ہیں

مسئلہ ۲۹

تکمیلی وتر مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں



اقطار ج ل، ج م کو تکمیلی وتروں ن ق، ق ن
 کے متوازی سمجھو اور فرض کرو کہ وہ ان کو ص
 اور بی پر قطع کرتے ہیں

تب ن ص : ص ق = ن ج : ج ن [اقلیدس ۴، ش ۲]

$$\therefore ن ص = ص ق$$

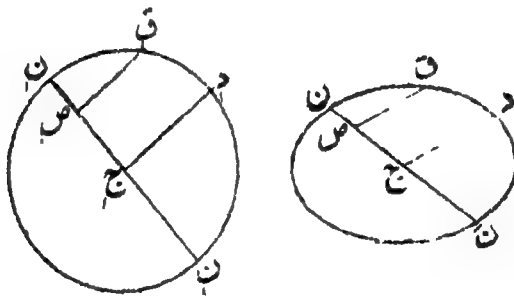
\therefore ج ل ان سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے

جون ق کے متوازی ہوں [مسئلہ ۲۴]
یعنی جو ج م کے متوازی ہوں
اسی طرح سے ج م اُن سب وتروں کی تنصیف
کرتا ہے جو ج ل کے متوازی ہوں۔

• ج ل، ج م مزدوج قطر ہیں
اگر ایک شکل متوازی الاضلاع قطع ناقص کے گرد کھینچی جائے
تو اس کے قطر مزدوج ہوں گے۔

مسئلہ ۳۰

اگر قطر ن ج ن کا معین ق ص ہو اور قطر
ج د، ق ص کے متوازی ہو تو ثابت کرو کہ
ق ص : ن ص = ج د : ج ن



وہ دائرہ کھینچو جس کا ظل قطع ناقص ہو اور فرض کرو کہ نقاط
ن، ص، ج، ن، ق، د کے ظل ن، ص، ج، ن، ق، د

ہیں

چونکہ ج ن ، ج د فوج قطر ہیں اسلئے

ن ج د زاویہ قائمہ ہے [مسئلہ ۲۸]

لیکن ق ص متوازی ہے ج د کے [مسئلہ ج]

اس لئے ق ص ، ج ن پر عمود ہے

∴ ق ص = ن ص × ن ص [اقلیدس م ۳ ش ۳ اور ۵]

∴ ق ص : ن ص = ن ص : ج د = ج د : ج ن

لیکن ق ص : ج د = ق ص : ج د [مسئلہ ج]

اور ن ص × ن ص = ج ن : ج ن = ج ن : ج ن [مسئلہ ج]

∴ ق ص : ن ص = ج د : ج ن

ق ص یا ق ص محدودہ پر ایک ایسا نقطہ رو کہ ص ر : ق ص = ج ن : ج د ثابت کرو کہ رساطریق قطع ناقص ہے اور اسکے محورون کے مقام دریافت کرو۔

مسئلہ ۳۱

مثلثات ج ن ل اور ج د ر میں ثابت کرو کہ

ج ر : ن ل = ج د : ج ب

اور ج ن : د ر = ج د : ج ب

ۛ مثلثات ل ن ج ج ر د ہر طرح سے
ایک دوسرے کے مساوی ہیں [اقیڈس م اش ۲۶]

$$\text{ن ل} = \text{ج ر}$$

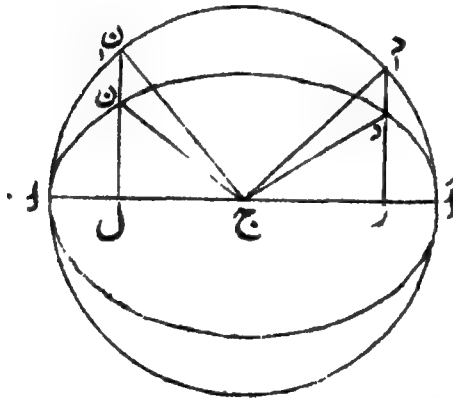
$$\text{لیکن ن ل : ن ل} = \text{ج ل : ج ب}$$

$$\text{ن ج ر : ن ل} = \text{ج ل : ج ب}$$

$$\text{اسی طرح سے ج ل : د ر} = \text{ج ل : ج ب}$$

مسئلہ ۳۲

$$\text{ج ن} + \text{ج د} = \text{ج ل} + \text{ج ب}$$



قطع ناقص کا امدادی دائرہ کھینچو۔

ل ن اور ر د کو اتنا خارج کرو کہ وہ امدادی دائرہ

کو ن اور د پر ملیں۔

ج ن، ج د کو ملاؤ

$$\text{تب د ر : ج ل} = \text{ج ب : ج ل} \quad [\text{مسئلہ ۳۱}]$$

اور $ن : ل : ج ر = ج ب : ج ا$ [مسئلہ ۳۱]
 $د ر + ن : ل : ج ا + ج ر = ج ب : ج ا$
 لیکن $ج ا + ج ر = ج ل + ج ا + ن ل = ج ا + ج ل + ن ل$ [مسئلہ ۳۱]
 $د ر + ن : ل = ج ب$
 اب $ج ن + ج د = ج ر + ج ل + د ر + ن ل$
 $ج ا + ج ب =$

مشقی مثالین مسئلہ ۳۱

اگر ن پر کا حماس محور اعظم کو ط پر ملے اور ق اس عمود کا پائین ہو جو ج سے حماس پر کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ

$ج ق \times ق ط : ج ط = ج ل \times ن ل : ج د$
 ثابت کرو کہ (ا) $ن گ : ج د = ج ب : ج ا$
 (ب) $ن گ : ج د = ج ا : ج ب$
 (ج) $ن گ \times ن گ = ج د$

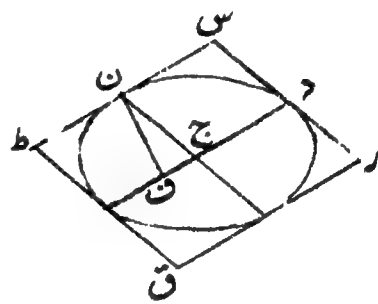
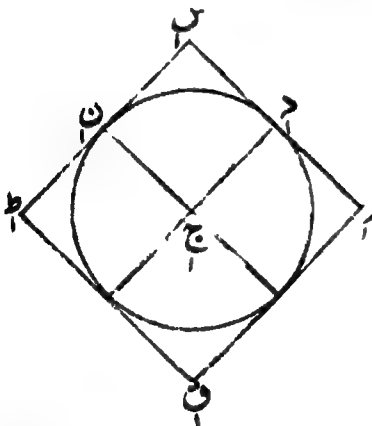
مشقی مثالین مسئلہ ۳۲

۱- مردوج قطرون کے ایک زوج کی حاصل جمع کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں دریافت کرو۔

۲- ج ن ج د مزدوج قطر ہیں ، اگر ن اور د پر کے عماد
ن گ اور د ع ہوں - تو ثابت کرو۔ کہ حاصل جمع
ن گ + د ع مستقل ہے۔

مسئلہ ۳۳

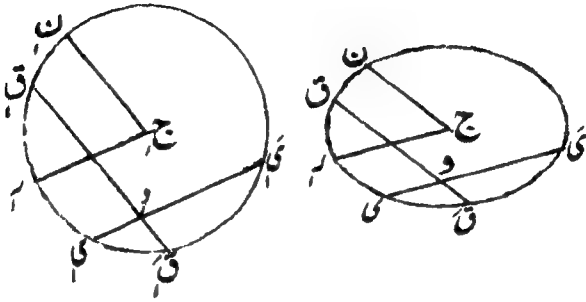
ثابت کرو کہ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو مزدوج
قطرون کے سروں پر تماس کھینچنے سے ہے مستقل
ہوتا ہے یعنی $ن ف \times ج د = ج ۱ \times ج ب$



فرض کرو کہ شکل متوازی الاضلاع ق ر س ط قطع
ناقص کے گرد بنی ہوئی ہے ، اس کے اضلاع ج ن یا ج د
کے متوازی ہیں

[مسئلہ ۳۴]
وہ دائرہ کھینچو جس کا قطر قطع ناقص ہو اور فرض
کرو کہ نقاط ن، ج، د، ق، ر وغیرہ کے قطر نقاط
ن، ج، د، ق، ر وغیرہ ہیں

نقاط ق، د، ق، و، غیر کے قِل ق، و، ق، و غیر
ہیں



دائرہ میں ق، د، ق، و = ق، د، ق، و = [اقلیدس م ۳۵ ش ۵]

اور ج، ن، ج، ر = ج، ر

∴ ق، د، ق، و = ق، د، ق، و = ج، ن، ج، ر

لیکن ق، د، ق، و = ق، د، ق، و = ج، ن، ج، ر [سُلج]

اور ی، د، ق، و = ی، د، ق، و = ج، ن، ج، ر [سُلج]

∴ ق، د، ق، و = ق، د، ق، و = ج، ن، ج، ر

مشقی مثالین مسئلہ ۳۳

۱- ن، گ، ن، گ = ج، د (دیکھو مسئلہ ۱۸)

۲- س، ن، س، ن = ج، د

۳- ج، د، س، ما = ج، د

۴- ج د، جن دو مزدوج قطر ہیں اگر دق، س ن کے متوازی کھینچا جائے اور ج ق، د ق پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ ج ق محور اصغر کے نصف کے مساوی ہے۔
 ۵- محور اصغر کو قطر ان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے اور نقطہ د سے اس دائرہ کے دو مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ یہ مماس ن کے مماسکی فاصلوں کے متوازی ہیں۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۳۴

۱- کسی نقطہ بیرونی سے قطع ناقص کے مماس کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ یہ متوازی نصف قطرون کے متناسب ہیں

۲- اگر ایک دائرہ قطع ناقص کو چار نقطوں پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ان کو ملانے والے وتر محورت مساوی زاوے بناتے ہیں۔

۳- اگر ایک دائرہ قطع ناقص کو نقاط ن اور ق پر مس کرے تو ثابت کرو کہ ن ق ایک محور کے متوازی ہے۔

۴- مسئلہ ۳ اور مسئلہ ۳۰ کو مسئلہ ۳۴ سے حل کرو

۵- اگر ن ق، ن ق محور سے مساوی زاوے بنائیں

تو ثابت کرو کہ $ن ق ق$ کا بیرونی دائرہ (یعنی وہ دائرہ جو مثلث $ن ق ق$ کے گرد بنایا جائے) مخروطی تراش کو $ن$ پر مس کرے گا۔



قطع زائد یا ہڈولی

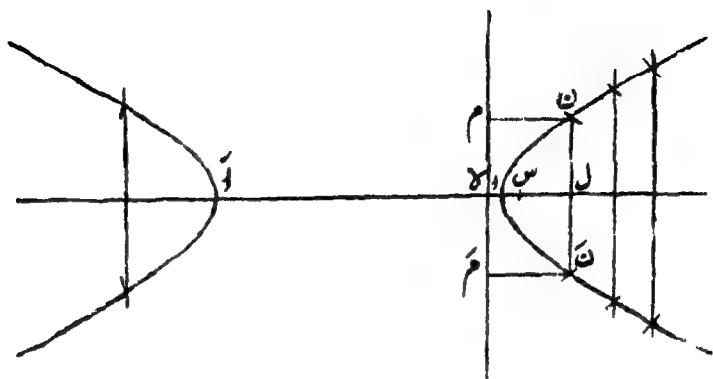
تعریف قطع زائد یا ہڈولی ایک ایسے نقطہ (ن) کا طریق ہے جس کے فاصلے ایک ثابت نقطہ (س) سے اور ایک ثابت مستقیم خط (لام) سے باہم ایسی نسبت (ر) رکھیں جو ایک سے زیادہ ہو۔

(س ن = ر × ن م)
 ثابت نقطہ (س) کو ماسکہ کہتے ہیں۔
 ثابت مستقیم خط (لام) کو مرتب کہتے ہیں۔
 مستقل نسبت (ر) کو خروج المرکز کہتے ہیں۔

مسئلہ ۱

قطع زائد پر کے نقاط دریافت کرنے کا عمل
 اگر ماسکہ سے مرتب پر عمود نکالا جائے تو وہ مسخنی کا
 محور تشاکل ہوگا

راس ۱ اور ۱ دریافت کرو



ماسکے میں سے مرتب پر غود میں لا مکینچو۔
لا میں کو لا پر اس طرح تقیم کرد کہ

$$s \times r = \frac{1}{8}$$

نیز سلا مودہ پر ایک ایسا نقطہ دلوکہ

$$s \cdot 1 = 1$$

تب لا اور لا بموجب تعریف منحنی پر واقع ہیں
 مستقیم خط لا پر کوئی نقطہ ل، ل، ل کو مرکز اور
 ر لا کو نصف قطمان کر ایک دائرہ کھینچو۔ نقطہ ل
 میں سے ایک عمود ن ل ن خط لا پر کھینچو جو دائرہ
 کو ن اور ن پر قطع کرے، تب ن اور ن قطع زائد
 پر ہوں گے۔

مرتب بر نمودن م، ن م، ن م، م

س ن = ر × ل لا = ر × ن م

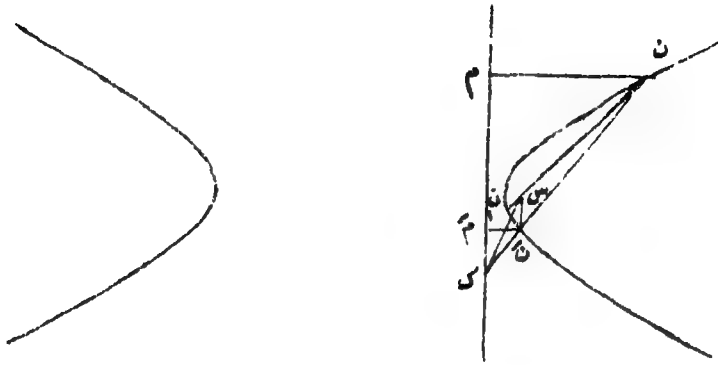
س ن = ر × ل لا = ر × ن م

پس معلوم ہوا کہ اگر لا پر کوئی نقطہ ل لیا جائے تو اس طرح سے ہمیں لا کے مقابل جانبوں میں مساوی فاصلوں پر دو نقطے ن اور ن حاصل ہوتے ہیں، اس لئے قطع زائد بلحاظ لا کے متشاکل ہے یعنی لا لا محور ہے اور نقاط لا اور لا اس کے راس ہیں۔

نوٹ۔ یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ دائرہ عمود ل ن کو ہمیشہ قطع کرے گا جب ل محور لا کے کسی حصہ پر واقع ہو سوائے اس حصہ کے جو لا اور لا کے درمیان ہے، اس لئے اگر لا اور لا پر دو خط کھینچے جائیں جو محور پر عمود ہوں تو قطع زائد بالکل ان خطوں کے باہر کی طرف واقع ہوگا لیکن دونوں طرف لاتنا ہی تک پھیلا ہوا ہوگا۔ (ضمیمہ لاجواب)

مسئلہ ۲

اگر وتر ن ن مرتب کوک پر قطع کرے تو س ک، س ن اور س ن کے درمیانی زاوے کی تنصیف کرے گا۔



س ن، س ن، س ک کو ملاؤ، ن س کو ن تک
خارج کرو اور مرتب پر عمود ن م، ن م نکالو۔

$$\text{تب} \quad \text{س ن} = \text{ر} \times \text{ن م}$$

$$\text{اور} \quad \text{س ن} = \text{ر} \times \text{ن م}$$

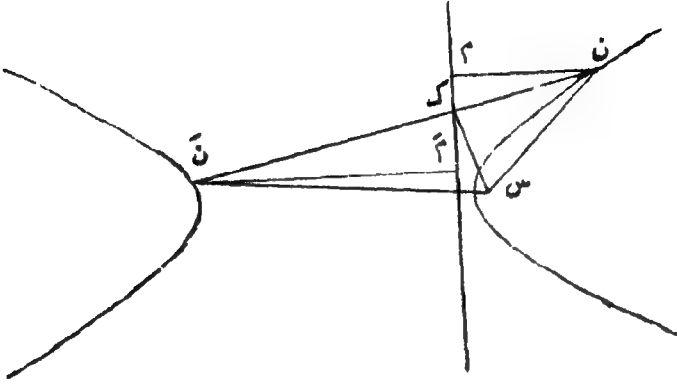
$$\therefore \text{س ن} : \text{س ن} = \text{ن م} : \text{ن م}$$

$$= \text{ن ک} : \text{ن ک} \text{ [تشابھتوں]}$$

$$\text{ن ک م، ن ک م سے}$$

اس لئے س ک زاویہ ن س ن کی تنصیف کرتا ہے۔

[اقلیدس م ۶ ش ۱]



اسی طرح سے اگر ن اور ن قطع زائد کی مختلف شاخوں پر واقع ہوں تو س ک زاویہ ن س ن کی تنصیف کرے گا۔

ثابت کرو کہ ایک مستقیم خط قطع زائد کو صرف دو نقطوں پر قطع کرتا ہے

مشقی مثالیں مسئلہ ۱

۱۔ اگر کسی تراش مخروطی میں ن م کو مرتب تک ایک ثابت اور مستقیم خط کے متوازی کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ نسبت س ن : ن م مستقل ہے۔

۲۔ اگر ایک ناقص، ایک مکافی اور ایک زائد کا ماسکہ اور مرتب دونوں مشترک ہوں تو ثابت کرو کہ ناقص مکافی کے بالکل ایک طرف واقع ہوگا اور زائد دوسری طرف۔

ثابت کرو کہ کسی مخروطی تراش میں ماسکہ میں سے گزرنے والا

وتر ماسک اور مرتب پر موسیقی نسبت میں تقیم ہوتا ہے

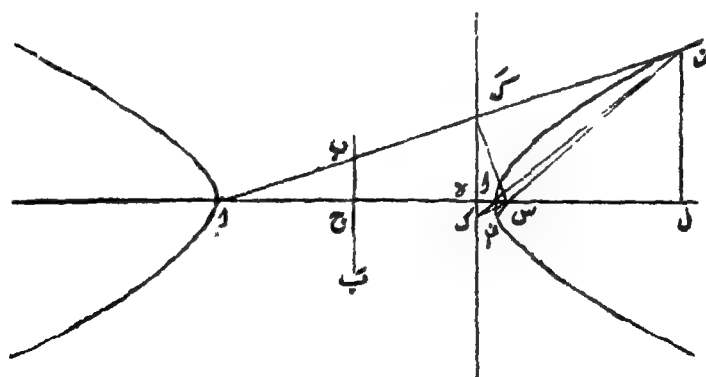
مشقی مثالیں مسئلہ ۲

۱۔ ثابت کرو کہ ایک مستقیم خط ایک مخروطی تراش کو صرف دو لفظوں
پر کاٹ سکتا ہے۔

۲۔ اگر ایک مخروطی تراش میں منحنی کے دو نقطوں 'ن'، 'ن' کو ایک متغیر نقطہ 'ق' سے ملایا جائے اور 'ن'، 'ق'، 'ن' ق مربع کو 'ن'، 'ن' پر ملیں تو ثابت کرو کہ زاویہ 'ن' 'س' 'ن' مستقل ہے

مسلم

اگر قطع زائد کے کسی نقطہ (ن) کا معین ن ل ہو تو ثابت کرو کہ نسبت ن ل : ا ل = ا ل مستقل ہے۔



نہ ان کو ملاؤ اور فرض کرو کہ بشرط ضرورت وہ خارج

کرنے پر مرتب کوک اور ک پر ملتے ہیں۔
 سن، س، ک، س، ک کو ملاؤ اور ن، س کو ن، تک خارج کرو
 متشابہ مثلثوں ن، ل اور ک، لا سے

ن: ل: ال = ک: لا: الا

متشابہ مثلثوں ن، ل اور ک، لا سے

ن: ل: ال = ک: لا: الا

ن: ل: ال = ال: ال = ک: لا: لا: الا

لیکن س، ک زاویہ اس، ن کی تنصیف کرتا ہے [مسئلہ ۲]
 اور س، ک زاویہ اس، ن کی تنصیف کرتا ہے [مسئلہ ۲]
 ک، س، ک ایک زاویہ قائمہ ہے

ک: لا: ک: لا = س: لا [اقلیدس م ۱۱ ش ۸]

ن: ل: ال: ال = س: لا: لا: الا

جو ایک مستقل نسبت ہے۔

تعریفات ج، ب: ج، ل کو اس مستقل نسبت کے مساوی لو

اور ل، ل پر عمود ج، ب قائم کرو

۱- تب ل، ل کو قاطع محور کہتے ہیں

۲- ج کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں

۳- ج، ب کو نیم مزدوج محور کہتے ہیں

پس ن: ل: ال: ال = ج: ب: ج: ل

مشقی مثالیں مسئلہ ۳

۱- $ن ل ن$ قطع ناقص کا دگنا معین ہے، $ل ن$ اور $آن$ کے تقاطع کا طریق دریافت کرو

۲- قائم قطع زائد (صفحہ ۱۲۶) کی صورت میں ثابت کرو کہ

$$ن ل^2 = ل ل \times ل ل$$

۳- ایک قائم قطع زائد کا دگنا معین $ن ل ن$ ہے، ثابت کرو کہ زادیوں $ن ل ن$ ، $ن ل ن$ کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہے

۴- ایک دائرہ کے کسی نقطہ $ن$ پر کا $اس$ ایک ثابت قطر $ا ب$ محدود کو ط پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ وہ مستقیم خط جو ط میں سے گزرے اور اس قطر پر عمود ہو $ل ن$ اور $ب ن$ محدودہ کو ایسے نقطوں پر ملے گا جو ایک قائم ہندولی پر واقع ہوں گے۔

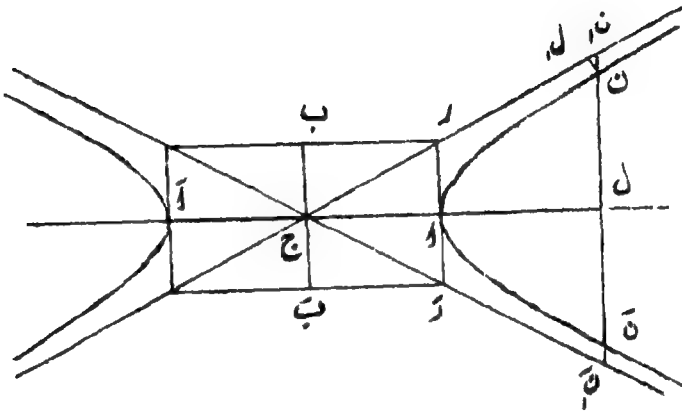
مسئلہ ۴

محاوراج $ا$ ، $ب ج ب$ کے سروں پر عمود قائم کرنے سے ایک مستطیل بنایا گیا ہے، اگر اس کے قطروں کو لا انتہا خارج کیا جائے اور معین $ل ن$ کو بھی دونوں طرف اتنا خارج کیا جائے کہ وہ قطروں کے نقاط $ن$ ، $ن$ پر ملے تو ثابت کرو کہ

$$\text{سطح } ن ن \times ن ن = ج ب^2$$

نیز ثابت کرو کہ متعنی ہر ایک قطر کے متواتر قریب

آتا جاتا ہے لیکن فی الحقیقت اس کو ملتا نہیں اور آخر الامر قطر اور منحنی کے درمیان فاصلہ اتنا کم رہ جاتا ہے کہ وہ ہر ایک محدود طول سے کم ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ ا اور ب میں سے جو خط محوروں کے متوازی کھینچے جاتے ہیں وہ ایک دوسرے کو نقطہ پر قطع کرتے ہیں اور فرض کرو کہ ن ن منحنی کو ن پر ملتا ہے۔

تب ل، ن، ن اور ن، ن دونوں کی تنصیف کرتا ہوں
[مسئلہ ۱]

$$ن، ن = ن، ن$$

لیکن $ن، ن \times ن، ن = ل، ن - ن، ل$ [تلمیذ مس ۲ س ۵]

$$ن، ن \times ن، ن = ن، ل - ل، ن$$

$$اب \quad ن، ل : ج، ل = ل، ن : ج، ل$$

= ج ب : ج لا

نیز ن ل : ال × ال = ج ب : ج لا [مسئلہ ۳]

یا ن ل : ج ل - ج لا = ج ب : ج لا [اقلیدس ۲ ش ۶]
تفریق کرنے سے

ن ل - ن ل : ج لا = ج ب : ج لا

ن ل - ن ل = ج ب

ن ن × ن ن = ج ب

چونکہ حاصل ضرب ن ن × ن ن ہمیشہ مستقل رہتا

ہے اور اس کا ایک جزو ضربی ن ن متواتر بڑھتا

ہے اس لئے ن ن متواتر گھٹتا ہے اور آخر الامر

ہر ایک محدود مقدار سے کم ہو سکتا ہے، نیز اگر ج ل

پر عمود ن ل نکالا جائے تو چونکہ نسبت ن ل : ن ن

مستقل ہے اس لئے ن ل متواتر گھٹتا ہے اور آخر الامر

کسی محدود طول سے کم ہو جاتا ہے

تعریف - جب ایک منحنی ایک ثابت مستقیم خط کے متواتر

قریب آتا جاتا ہے اور باوجود اس کے اسکو کبھی نہیں

ملتا اُس کا فاصلہ اُس خط سے آخر الامر کسی محدود طول

سے کم ہو جاتا ہے تو اس مستقیم خط کو منحنی کا مستقیم

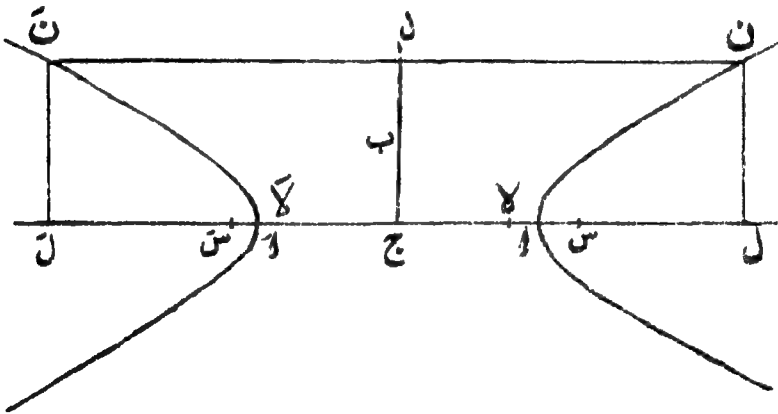
مقارب کہتے ہیں -

تعریف - جب ایک ہذلولی کے مقارب ایک دوسرے

سے زاویہ قائمہ بنائیں تو منحنی کو قائم ہذلولی یا قائمہ
قطع زائد کہتے ہیں، قائم ہذلولی کے محور مساوی
ہوتے ہیں اس لئے اس کو بعض اوقات متساوی الاضلاع
ہذلولی بھی کہتے ہیں۔

مسئلہ ۵

قطع زائد بلحاظ مزدوج محور کے متشاکل ہے اور اس کا
ایک اور ماسکہ اور مرتب ہے۔
نیز منحنی کے سب دتروں کی تنصیف مرکز پر ہوتی ہے



میں ن ل کھینچو اور ج ل کو ج ل کے مساوی لو
چونکہ ن قطع زائد پر واقع ہے اس لئے ج ل < ج ل
ج ل < ج ل

اس لئے اگر نقطہ ل پر ایک عمود قائم کیا جائے تو وہ قطع زائد کو قطع کرے گا۔

فرض کرو کہ یہ عمود قطع زائد کو ن پر کاٹتا ہے

تب ن ل : ل ل × ل ل = ن ل : ل ل × ل ل [مسد ۳]
لیکن ل ل = ل ل اور ل ل = ل ل

∴ ل ل × ل ل = ل ل × ل ل

∴ ن ل = ن ل

∴ ن ل = ن ل

ن ن کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ ج ج یا ج ب عمود کو ل پر ملتا ہے۔

اس لئے ن ل ن ل محور کے متوازی ہے اور اس لئے ج ج پر عمود ہے۔

اور ن ل = ن ل

اس سے معلوم ہوا کہ کسی نقطہ ن کے مقابل

ج ب کے دوسری طرف قطع زائد پر ایک اور نقطہ

ن ایسا ہے کہ ج ج اور ن ن کا نقطہ تقاطع

ن کی تنصیف زاویہ قائمہ پر کرتا ہے یعنی ہذلولی

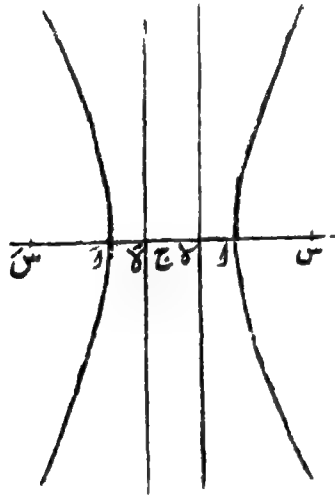
بلحاظ مزدوج محور کے متشاکل ہے۔

اگر ہم ج ج کو ج ج کے مساوی بنائیں اور

ج لا کو ج لا کے اور لا میں سے ایک ایسا خط
 لکھیں جو لا پر عمود ہو تو اس خط کو مرتب اور س
 کو ماسک مان کر ہم قطع زائد کو مرسم کر سکتے ہیں
 جہاں خروج المرکز کی قیمت وہی ہے جو پہلے تھی

مسئلہ ۴

س لا = ر × لا ' ج لا = ر × ج لا ' ج س = ر × ج لا '
 اور ج لا ' = ج س × ج لا



چونکہ نقاط لا اور لا ہذلولی پر ہیں

[تعریف]

∴ س لا = ر × لا

[تعریف]

[تہرین]

$$س ا = ر \times لا$$

$$لا \times ر =$$

عمل تفریق سے $ا = لا \times ر$

(۱)

$$ج ا = ر \times ج لا$$

عمل جمع سے $س س = ر \times لا$

(۲)

$$ج س = ر \times ج ا$$

(۳)

$$ج ا = ج س \times ج لا$$

نوٹ - اس شکل میں خروج المرکز تقریباً ۲۱۲ ہے "مسئلہ ۵" کی شکل میں خروج المرکز صرت ۱۱۱ ہے، نسبت کی تبدیلی کا اثر نقاط س، ا، لا کے اضافی مقامات پر، نیز منحنی کی عام شکل پر ان مسائل کی اشکال کو باہم مقابلہ کرنے سے خوب واضح ہوتا ہے، اس شکل میں ج ب = ۲ × ج ا اور دلفہ گزشتہ کی شکل میں ج ا = ۲ × ج ب

مشقی مثالیں مسئلہ ۶

۱۔ اگر ایک متقارب مرتب کو ع پر ملے تو ثابت کرو کہ ج ع = ج ا اور زاویہ ج ع س قائم ہے۔

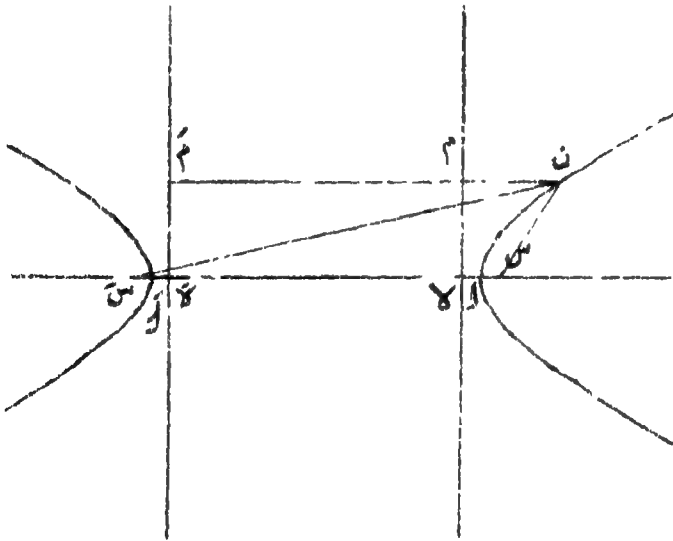
۲۔ اگر ن کو ایک متقارب کے متوازی کھینچا جائے اور وہ مرتب کو ن پر ملے تو ثابت کرو کہ ن ن = س ن

۳۔ قاطع اور مزدوج محوردئے ہوئے ہیں، ماسکہ اور مرتب دریافت کرو۔

۴۔ اگر Δ کو قطران کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ یہ دائرہ مربوں کو انہیں نقاط پر قطع کرے گا جہاں مغنی کے متقاربت قطع کرتے ہیں۔

مسئلہ ۷

سن - سن = Δ قطع زائد کی آلی ترکیب



مربوں پر عمود ن م م نکالو۔

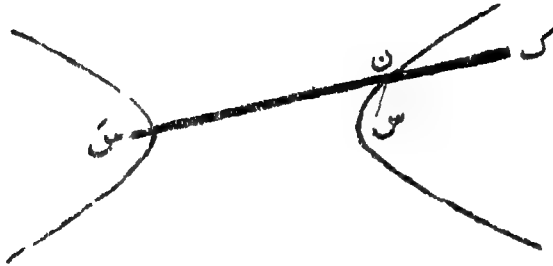
تب $سن = ر \times ن م$

اور $سن = ر \times ن م$

∴ $سن - سن = ر \times ن م$

$\Delta \times لا =$

$\Delta =$



اس سے قطع زائد کو مرتسم کرنے کی آلی ترکیب معلوم ہوتی ہے۔ س ک ایک لکڑی کی سلاخ ہے جو س پر قبضہ کے ذریعہ وصل کر دی گئی ہے، اور ایک سی س ن ک نقاط س اور ک پر بندھی ہے اس کو نقطہ ن پر ایک پنسل کے ذریعہ تانے رکھتے ہیں۔

س ن + ن ک = ایک مستقل مقدار

س ن + ن ک = ایک مستقل مقدار

س ن - س ن = ایک مستقل مقدار

مشقی مثالیں مسئلہ

۱۔ ایک دائرہ دو ثابت دائروں کو مس کرتا ہے، ثابت کر دو کہ

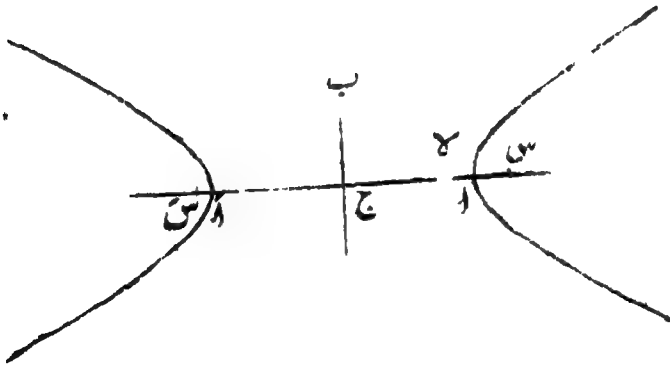
اس کے مرکز کا طریق یا تو قطع ناقص ہے یا ہلوی۔

۲۔ قطع ناقص کا ایک ماسک اور منحنی پر کے دو نقاط دئے ہوئے

ہیں ثابت کرو کہ دوسرے پاسکے طریق ایک قطع زائد ہے۔
 نوٹ۔ اگر ایک لکڑی کے مخروط کو ایک ایسی سطح سے کاٹا جائے
 جو قاعدہ پر عمود ہو تو تراش قطع زائد یا بند لولی ہوگی، ان تراشوں کو
 استعمال کرنے سے اس باب کی کل شکلوں کو کھینچا گیا ہے، تراش دے
 مخروطی کے لئے دیکھو انگلے باب کا مسئلہ ۳۔

مسئلہ ۸

$$ج ب = ج س - ج ا = س ا \times س ا$$



$$ج س : ج ا = س ا : ا ا \quad [مسئلہ ۶]$$

$$ج س + ج ا : ج ا = س ا + ا ا : ا ا$$

$$س ا : ا ا =$$

(۱)

[مسئلہ ۷]

$$ج س : ج ا = س ا : ا ا$$

$$ج س - ج ا : ج ا = س ا - ا ا : ا ا$$

(۲)

$$س ا : ا ا =$$

اس لئے (۱) اور (۲) کو باہم ضرب دینے سے

$$ج س - ج ا : ج ا = س لا : لا لا \times لا لا$$

$$= ج ب : ج ا [مسئلہ ۳]$$

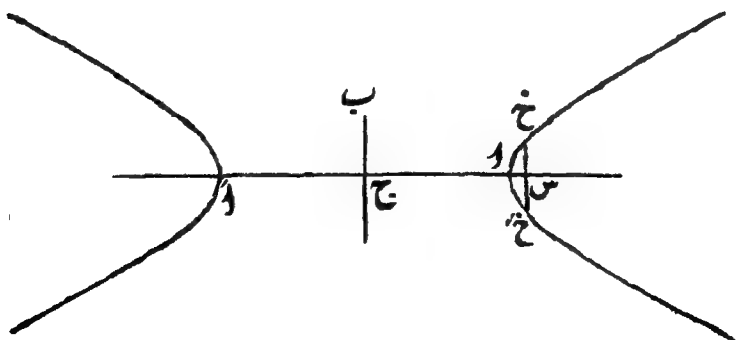
$$ج س - ج ا = ج ب = لا س \times لا س [اقلیدس ۲۲ ش م]$$

مشقی مثالیں مسئلہ ۸

- ۱۔ قائم قطع زائیں رہا ج س = ۲ ج ا اور ج س = ۲ ج لا
- ۲۔ اگر متقارب مرتب نوع اور راس پر کے ماس کو د پر سے تو
 س ع = ب ج اور س د متوازی ہے ا و ع کے
 تعریف - ماسک میں سے جو دگنا معین گذرتا ہے اس کو
 ہم وتر خاص (نخخ) کہیں گے۔

مسئلہ ۹

$$س خ \times ج ا = ج ب$$



س خ : ۱ س × ۱ س = ج ب : ج ۱ [مسئلہ ۳]

لیکن ۱ س × ۱ س = ج ب [مسئلہ ۴]

∴ س خ : ج ب = ج ب : ج ۱

∴ س خ : ج ب = ج ب : ج ۱

∴ س خ × ج ۱ = ج ب

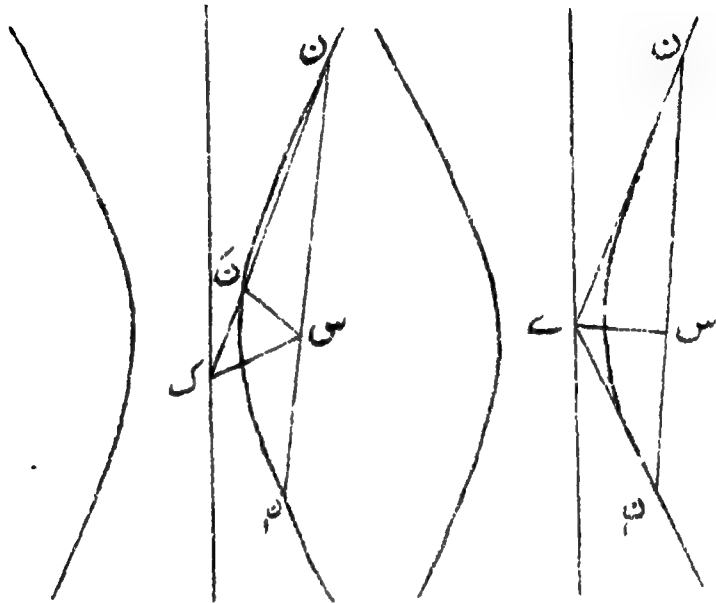
مشقی مثالیں مسئلہ ۹

- ۱۔ اس مسئلہ کو سائل ۶ اور ۸ کی مدد سے ثابت کرو
- ۲۔ قائم قطع زائد کی صورت میں ثابت کرو کہ س خ = ج ۱

مسئلہ ۱۰

اگر ن پر کاماس مرتب کو سے پر لے تو ثابت کرو کہ ن س سے زاویہ قائمہ ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اگر ایک ماسکی وتر کے سروں پر ماس کھینچے جائیں تو وہ ایک دوسرے کو مرتب پر قطع کریں گے۔



قطع زائد پر ن کے قریب ایک نقطہ ن لو اور فرض
 کرو کہ وتر ن ن مرتب کو ک پر ملتا ہے، ن س
 کو ن تک خارج کرو تب ک س زاویہ ن س ن
 کی تنصیف کرے گا [مسئلہ ۲]

جب ن ن پر منطبق ہوتا ہے (جیسا کہ شکل ۲ میں) تو
 ن ن ک مماس ن سے بن جاتا ہے اور س ک
 سے پر منطبق ہوتا ہے اور زاویہ ن س ن دو قاعوں
 کے برابر ہو جاتا ہے، اس وقت ن س سے ایک
 قائمہ کے مساوی ہوتا ہے۔

اس لئے زاویہ سے س ن قائمہ ہے اور سے ن ن پر
 کا مماس ہے یعنی ن اور ن پر کے مماس ایک

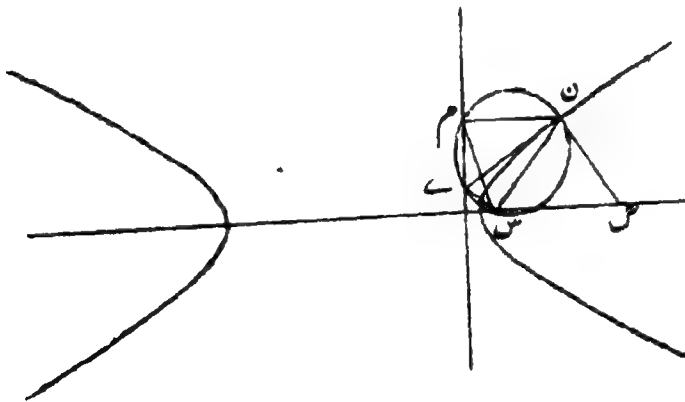
دوسرے کو مرتب پر قطع کرتے ہیں۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۰

اگر $م$ $ن$ اور $س$ $ن$ محدودہ وتر خاص کو $د$ اور $د$ پر ملیں تو ثابت کرو کہ $س د = س د$

مسئلہ ۱۱

اگر $ن$ پر کا عاود قاطع محور کو $گ$ پر $س$ تو $س گ = ر × س ن$



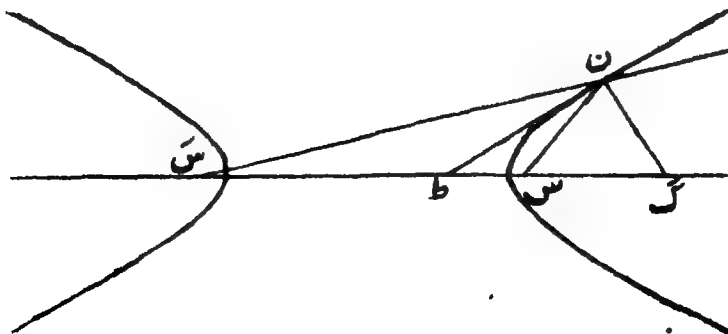
ماس $ن$ $س$ $م$ کھینچو، $س$ $س$ کو ملاؤ اور مرتب پر عمود $ن$ $م$ نکالو، $س$ $م$ کو ملاؤ۔

زواہ $س$ $ن$ اور $س$ $س$ $ن$ قائمے ہیں [مسئلہ ۱۰]
اس لئے اگر $س$ $ن$ کو قطران کر ایک دائرہ کھینچا

جائے تو وہ س اور م میں سے گزرے گا [انطیس م ۳ ش ۳۱]
 چونکہ ن گ زاویہ قائمہ ہے اسلئے ن گ دائرہ
 کو مس کرتا ہے [انطیس م ۳ ش ۱۶]
 اسلئے زاویہ س ن گ = زاویہ س م ن چونکہ یہ متبادل
 قطعہ میں واقع ہے [انطیس م ۳ ش ۳۲]
 نیز زاویہ گ س ن = زاویہ س ن م [انطیس م ۱ ش ۲۹]
 اسلئے مثلثات س ن گ ، ن م س متشابه ہیں
 ∴ س گ : س ن = س ن : ن م
 ∴ س گ = س ن × س ن

مسئلہ ۱۲

اگر قطع زائد کے کسی نقطہ ن پر تماس اور عماد کھینچے
 جائیں تو نہایت کر وہ اس نقطہ کے ماسکی
 فاصلوں کے درمیانی زاویہ کے بالترتیب داخلی اور
 خارجی منصف ہونگے۔



فرض کرو کہ طان مماس اور ن گ عماد ہے اور
یہ قاطع محور کو ط اور گ پر ملتے ہیں۔

س گ = ر × س ن [مسئلہ ۱۱]
اور س گ = ر × س ن

س گ : س گ = س ن : س ن
اس لئے ن گ زاویہ س ن س کی خارجاً تنصیف
کرتا ہے۔ [افلیدس م ۶ ش ۱]

چونکہ س ن ط ، س ن ط میں سے ہر ایک خارجہ
زاویہ کے نصف کا متمم ہے۔

اس لئے ن ط زاویہ س ن س کی داخلاً تنصیف
کرتا ہے۔

نوٹ۔ اس مسئلہ کا ایلچی کے مسئلہ ۱۳ کے ساتھ مقابلہ کرو۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۲

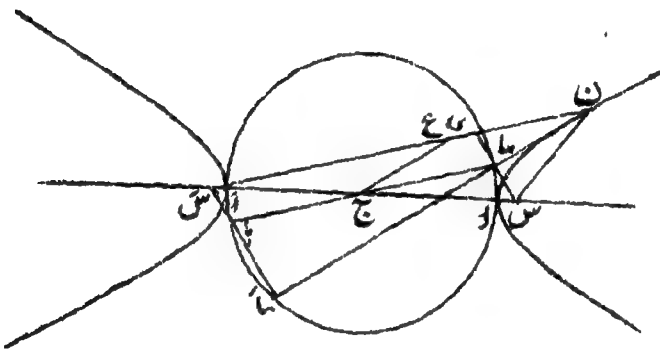
- ۱۔ بذلولی کا ایک ماسکہ معلوم ہے نیز منحنی پر کا ایک نقطہ اور
اُس نقطہ پر کا مماس دیا ہوا ہے، دوسرے ماسکہ کا طریق دریافت کرو۔
- ۲۔ اگر ایک ایلچی اور ایک بذلولی کے ماسکے ایک ہی ہوں تو
ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔

مسئلہ ۱۳

اگر ایلچی کے کسی نقطہ ن پر مماس کھینچا جائے

اور ماسکوں سے ماس پر عمود (س ما، س ما) نکالے جائیں تو عمودوں کے پائیں ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوں گے جس کا قطر Δ ہوگا۔
 نیز اگر ج ع، ن پر کے ماس کے متوازی ہو اور س ن کو ع پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ن ع = ج Δ

نیز س ما \times س ما = ج ب



س ما کو اتنا خارج کر دو کہ وہ س ن کو می پر ملے
 مثلثات مان س اور مان ی میں ن ما
 مشترک ہے، زاوے ن ماس اور ن مای
 قائمے ہیں اور زاویہ مان س = زاویہ مان ی
 [مسئلہ ۱۲]

س ما = مای، س ن = ن ی [اقلیس م ۱ ش ۳۶]
 اسلئے ن س ی متوازی ہے ج ما کے [اقلیس م ۶ ش ۲]

اس لئے ج ما = $\frac{1}{4}$ س ی

$$\frac{1}{4} = (\text{س ن} - \text{س ن})$$

$$\frac{1}{4} = \text{ا ا} \quad [\text{مسئلہ ۷}]$$

$$\text{ج} = \text{ا}$$

اس لئے ما اُس دائرہ پر واقع ہے جس کا قطر ا ا ہے
اسی سے ما امدادی دائرہ پر واقع ہے

نیز ما ج ع ن ایک متوازی الاضلاع ہے اسلئے

$$\text{ن ع} = \text{ج ما} = \text{ا ج}$$

فرض کرو کہ ما س دائرہ کو مار پر ملتا ہے، ما مار کو
طاؤ اب چونکہ زاویہ ما ما مار قائمہ ہے اس لئے
ما مار دائرہ کے مرکز ج میں سے گزرتا ہے۔

[اقلیدس م ۳ ش ۳۱]

[اقلیدس م ۱ ش ۲]

$$\text{س ما} = \text{س مار}$$

$$\text{س ما} \times \text{س ما} = \text{س مار} \times \text{س مار}$$

$$= \text{ا س} \times \text{ا س} \quad [\text{اقلیدس م ۳ ش ۳۵}]$$

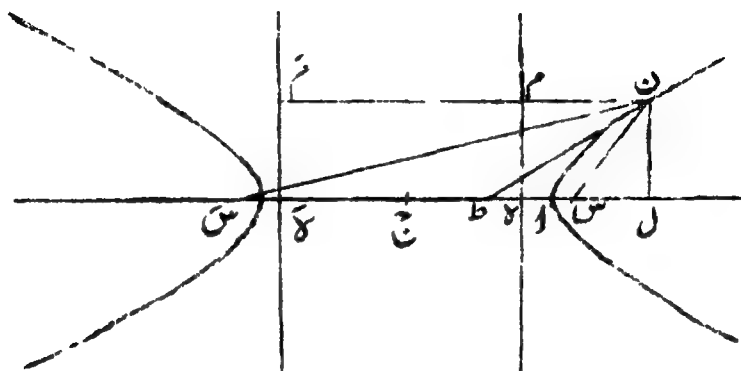
$$\text{ج ب} =$$

[مسئلہ ۸]

مسئلہ ۱۴

اگر ن پر کا ماس قاطع محور کو ط پر ملے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ج ل} \times \text{ج ط} = \text{ج ا}$$



مرتبوں پر عمود ن م م کینچو
 س ن، س ن کو ملاؤ
 تب چونکہ ن ط زاویہ س ن س کی تنصیف کرتا ہے [مسد]
 ∴ س ط : س ط = س ن : س ن [اقلیدس ۶ ش ۱]
 = ن م : ن م
 = ل ل : ل ل
 ∴ س ط + س ط = س ط = ل ل + ل ل
 ل ل - ل ل :
 ∴ ۲ ج س : ۲ ج ط = ۲ ج ل : ۲ ج ل
 ∴ ج ل × ج ط = ج س × ج ل
 = ج ل
 [مسد ۶]

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۳

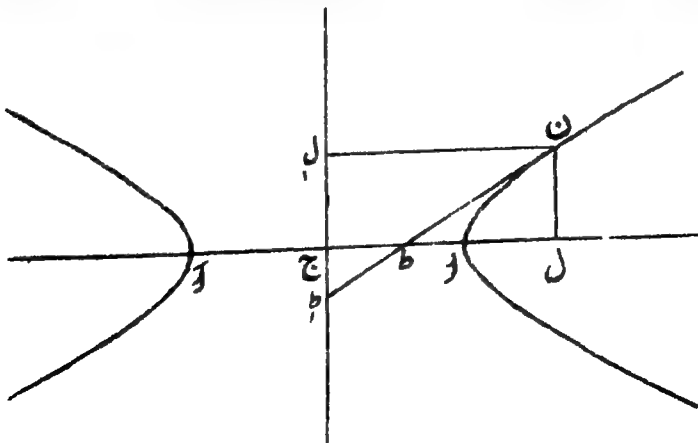
جو مشقی مثالیں قطع ناقص کے بارے میں صفحہ (۸۲ و ۸۱) پر دی گئی ہیں وہ قطع زائد کی صورت میں بھی درست ہیں سوائے نمبر ۸ کے

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۴

- ۱۔ اس طریقہ سے قطع ناقص کے مسئلہ ۱۶ کو ثابت کرو
- ۲۔ اگر محور پر عمود ط ن قائم کیا جائے جو امدادی دائرہ کو ن پر ملے تو ثابت کرو کہ ل ن دائرہ کا مماس ہے۔
- ۳۔ ثابت کرو کہ ج ل \times ل ط = ل ل \times ل ل

مسئلہ ۱۵

اگر ن پر کا مماس ممدودہ مزدوج محور کو ط پر ملے اور اگر



نقطہ ن سے مزدوج محور پر عمود ن ل نکالا جائے تو
ثابت کرو کہ

$$ج ل \times ج ط = ج ب$$

معین ن ل کھینچو
تب متشابہ مثلثوں سے

$$ط ل : ج ط = ن ل : ج ل$$

$$\therefore ط ل \times ج ل : ج ط \times ج ل = ن ل : ج ل \times ج ط \times ج ل$$

$$\therefore ط ل \times ج ل : ج ل \times ج ط = ن ل : ج ل \times ج ط \times ج ل \quad [مسئلہ ۱۴]$$

$$\text{لیکن } ط ل \times ج ل = ج ل - ج ط \times ج ل$$

$$[مسئلہ ۱۴] \quad ج ل - ج ل = ج ل - ج ط \times ج ل$$

$$[افقیس م ۲ ش ۵] \quad ج ل \times ج ل = ج ل - ج ط \times ج ل$$

$$\therefore ج ل \times ج ل : ج ل \times ج ط = ج ل : ج ط \times ج ل$$

اس لئے تبدیل نسبت سے

$$ج ل \times ج ل : ج ل \times ج ط = ج ل : ج ط \times ج ل$$

$$\text{لیکن } ج ل \times ج ل : ج ل \times ج ط = ج ل : ج ط \times ج ل \quad [مسئلہ ۱۴]$$

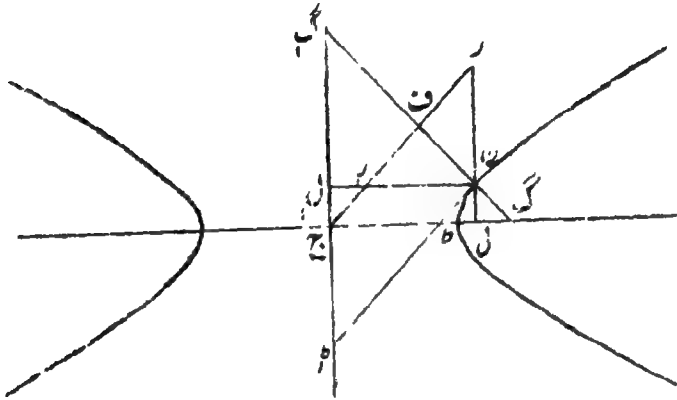
$$\therefore ج ط \times ج ل = ج ب$$

مسئلہ ۱۶

اگر مرکز ج میں سے ن پر کے ماس کے متوازی

ایک خط کھینچا جائے اور ن سے اس خط پر عمود

ن ف نکالا جائے اور اگر ن پر کا عماد مزدوج محور کو گ پر ملے تو ن ف \times ن گ = ج ب اور ن ف \times ن گ = ج ا



محوروں پر عمود رن ل اور ن ر ل کھینچو اور فرض کرو کہ وہ ج ف کو ر اور ل پر ملتے ہیں، نیز فرض کرو کہ ن پر کا تماس محوروں کو ط اور ط پر ملتا ہے۔

تب چونکہ ل اور ف پر کے زاوے قائمے ہیں اسلئے ایک دائرہ گ ل ف ر کے گرد کھینچ سکتا ہے [اقلیس م ۳ ش ۲۲] اسلئے ن گ \times ن ف = ن ل \times ن ر [اقلیس م ۳ ش ۲۵]

$$= ج ل \times ج ط = ج ب \quad [\text{مسئلہ ۱۵}]$$

نیز چونکہ ف اور ل پر کے زاوے قائمے ہیں اس لئے گ ف ل کے گرد ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے۔

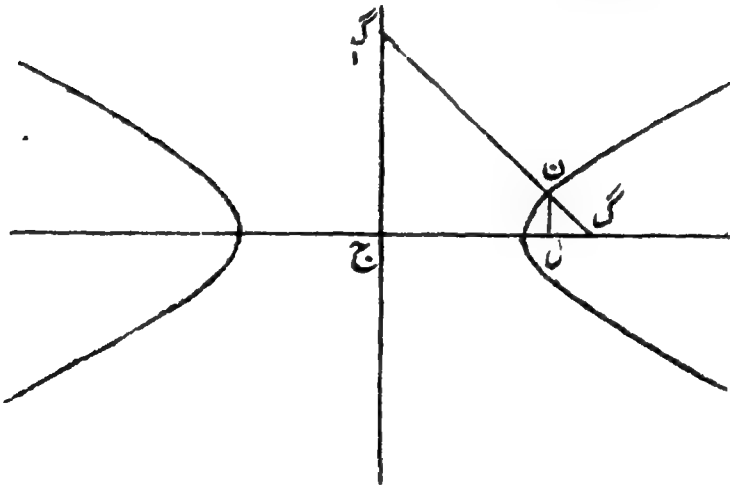
$$\therefore ن ف \times ن گ = ن ل \times ن ر [\text{اقلیس م ۳ ش ۲۶}]$$

$$= ج ل \times ج ط = ج ا \quad [\text{مسئلہ ۱۴}]$$

نوٹ - یہ بعد ازاں معلوم ہوگا کہ خط مذکورہ ج ف د قطر ج د ہے
جو ج ن کا مزدوج ہے

مسئلہ ۱۷

ل گ : ج ل = ج ب : ج ا اور ج گ = ج ر : ج ل



گ ن کو اتنا خارج کرو کہ وہ مزدوج محور کو گم پر ملے

تب ل گ : ج ل = ن گ : ن گ [اقلیدس م ۶ ش ۲]

= ن گ × ن ف : ن گ × ن ف

= ج ب : ج ا [مسئلہ ۱۶]

نیز چونکہ ل گ : ج ل = ج ب : ج ا

∴ ج ل + ل گ : ج ل = ج ب + ج ا : ج ا

∴ ج گ : ج ل = ج س : ج ا [مسئلہ ۱۸]

$$ر : ۱ =$$

$$جگ = ر \times ج ل$$

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۷

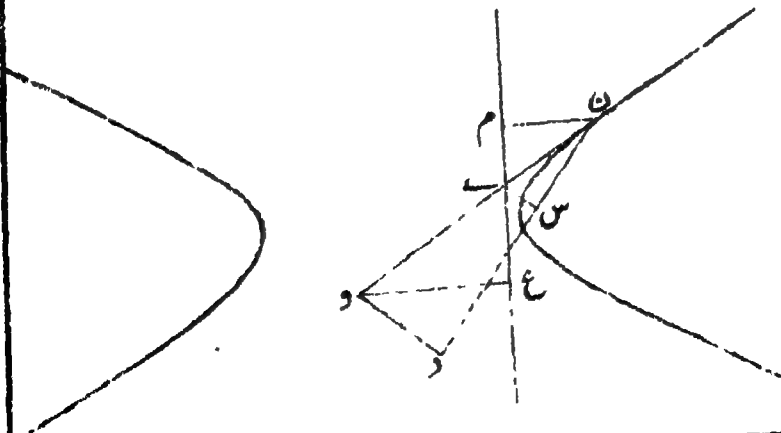
۱۔ ثابت کرو کہ جگ \times ج ل : جگ \times ج ل = ب ج : ا ج

۲۔ قائم ہڈولی میں ثابت کرو (۱) ج ل = ل گ

(ب) ن گ = ن گ = ج ن

مسئلہ ۱۸

اگر ہڈولی کے کسی نقطہ ن پر کاس کھینچا جائے اور
ماس پر کے ایک نقطہ و سے مرتب پر عمود و ع اور
س ن پر عمود و د نکالے جائیں
تو ثابت کرو کہ س د = ر \times و ع [اس خاصیت ہندس آدم سے منسوب
کرتے ہیں]



مرتب پر عمود و ع کھالو، س کو مرکز اور د و ع کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو اور نقطہ و سے اس دائرہ کے دو تماس و د اور و د کھینچو۔

س د پر عمود س سے قائم کرو جو مرتب کو بے پر ملے
بے و کو ملاؤ اور اس کو اتنا خارج کرو کہ یہ س د کو ق
پر ملے، مرتب پر عمود ق ل کھالو۔

تب س ق : س د = ق ل : و بے

= ق ل : و ع

س ق : ق ل = س د : و ع = ر : ا

اس لئے نقطہ ق ہذلولی پر ہے۔

اور چونکہ ق س بے قائم ہے اس لئے وق قطع زائد کے
نقطہ ق پر کا تماس ہے۔

[مسئلہ ۱۰]

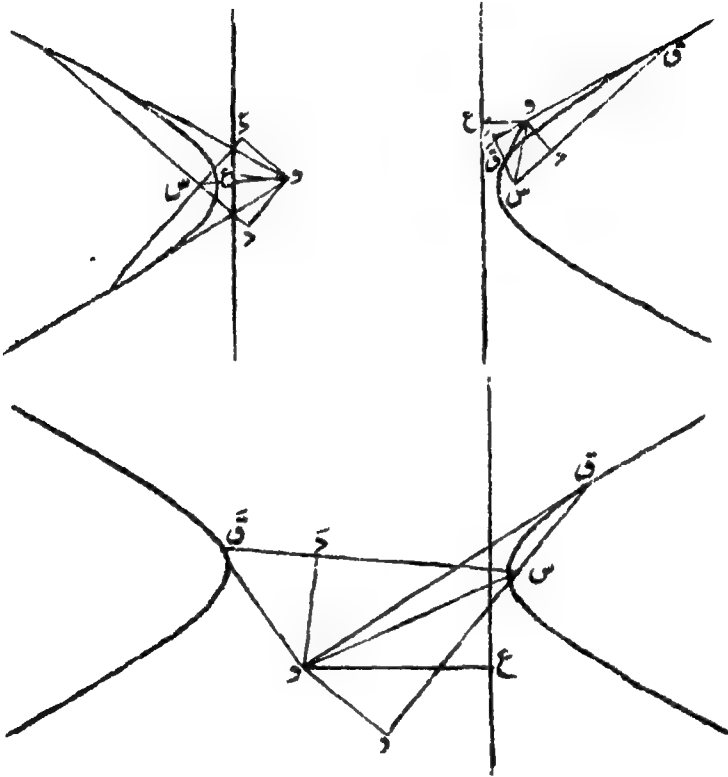
اسی طرح سے اگر ہم س د پر عمود س سے قائم
کریں، و بے کو ملائیں اور اس کو اتنا خارج کریں کہ
وہ س د کو ق پر ملے تو وق دوسرا تماس ہوگا

نوٹ۔ ادھر کا حل مسئلہ ۱۸ کی مدد سے حاصل ہوا لیکن مسائل
۱۲ اور ۱۳ کی بناء پر بھی تماس کھینچے جاسکتے ہیں۔

مسئلہ ۲۰

اگر نقطہ ق اور ق زائد کی ایک ہی شاخ پر واقع ہوں
تو ثابت کرو کہ تماسات وق، وق کے محاذی ناسم

پر مساوی زاوے و س ق ، و س ق بنتے ہیں لیکن
اگر یہ نقطے مقابل کی شاخوں پر واقع ہوں تو اوپر کے
زاویوں میں سے ہر ایک زاویہ دوسرے کا تکملہ ہوگا۔



مرتب پر عمود و غ مخالفو

و س ، س ق ، س ق کو ملاؤ اور س ق ، س ق
پر عمود و د ، و د کھینچو

[مسئلہ ۱۸]

تب س د = ر × و غ = س د

اسلئے مثلث و س د ، و س د ہر طرح سے مساوی

[انٹلیس م، اسش ۲۶]

ہیں۔

اس لئے زاویہ $وس د = زاویہ وس د$
 ۱۔ سلسلے شکل میں، زاویہ $وس ق = زاویہ وس ق$ اور
 شکل ۲ میں زوایا $وس ق$ ، $وس ق$ میں سے ہر ایک
 زاویہ دوسرے کا تکملہ ہے۔
 نوٹ۔ اگر درمیان واقع ہو تو شکل کی بائیں
 طرف کا حصہ استعمال کر۔

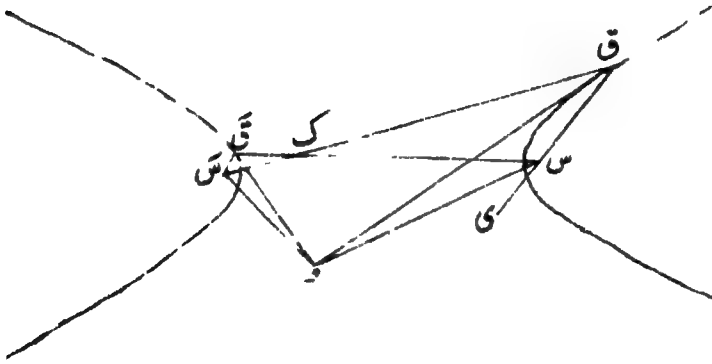
مشقی مثالیں مسئلہ ۲۰

- ۱۔ اگر ایک زائد کے راسوں پر حماس کھینچے جائیں تو جو حصہ
 وہ کسی تیسرے حماس سے کاٹیں گے اس کے محاذی ہر ایک
 ماسکہ پر زاویہ قائمہ بنے گا۔
- ۲۔ ثابت کرو کہ مثلث $سن س$ کے اندرونی دائرہ کے مرکز
 کا طریق ایک مستقیم خط ہے۔
- ۳۔ ثابت کرو کہ خط $سن$ و اور مرتب دونوں ملکہ دتر تماس
 $ق ق$ کو موسیقی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں

مسئلہ ۲۱

ثابت کرو کہ $وق$ اور $وق$ خطوط $وس$ اور $وس$
 کے ساتھ بالترتیب مساوی زاوے بنائیں گے اگر
 $ق$ اور $ق$ مقابل کی شاخوں پر واقع ہوں لیکن

اگر قی اور قی ایک ہی شاخ پر واقع ہوں تو خطوط مذکورہ
بالترتیب ایک دوسرے سے ایسے زاوے بنائیں گے
جن میں سے ہر ایک دوسرے کا تکملہ ہوگا
صورت اول۔ س قی، س قی، س قی، س قی
کو ملاؤ اور قی س کو ہی تک خارج کرو اور فرض کرو
کہ س قی، س قی کوک پر ملتا ہے۔



تب زاویہ س وق = و س ی - و ق س

[اقطیس م اش ۳۲]

= ۱/۲ و ق س ی - ۱/۲ و س ق س

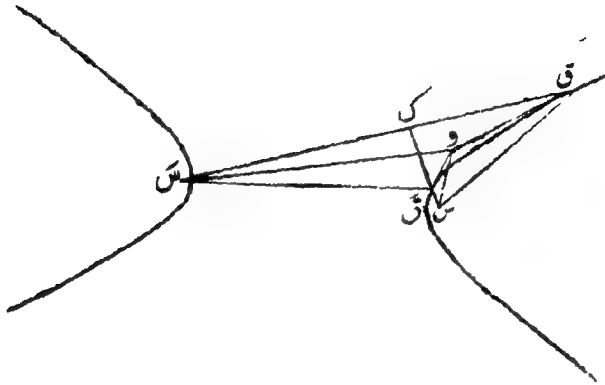
[مسائل ۲۰ اور ۱۲]

= ۱/۲ و س ک ق [اقطیس م اشکل ۳۲]

اسی طرح سے و س وق = ۱/۲ و س ک ق

∴ و س وق = ۱/۲ و س وق

صورت دوم



س وق = ۱۸۰ - س ق - وق س [اقلیدس م اش ۳۲]

س ق س = ۱۸۰ - س ق - س ق س

[سائل ۲۰ اور ۱۲]

س ک س = ۱۸۰ - س ک س [اقلیدس م اش ۳۲]

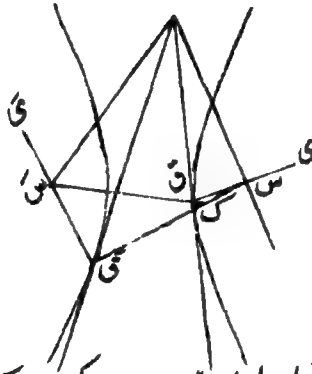
س وق = ۱۸۰ - وق س - وق س [اقلیدس م اش ۳۳]

س ق س = ۱۸۰ - س ق س [سائل ۱۲]

س ک س = ۱۸۰ - س ک س [اقلیدس م اش ۳۲]

س وق = ۱۸۰ - س وق

صورت دوم میں نقطہ و اُن دو زاویوں میں سے ایک کے اندر واقع ہے جو متقابلوں کے باہمی تقاطع سے بنتے ہیں اور جن کے اندر قطع زائد کی شاخیں واقع ہیں۔ صورت



اول میں نقطہ و باقی دو زاویوں میں سے کسی کے اندر واقع ہے نیز ثبوت کی نوعیت کچھ اس امر پر بھی مبنی ہے کہ آیا نقطہ و مرتبوں کے درمیان واقع ہے یا ان کے باہر۔ صورت اول مندرجہ بالا میں نقطہ و مرتبوں کے درمیان واقع ہے، شکل بالا میں یہ ان کے باہر ہے اور اس لئے ک، س ق محدودہ پر واقع ہے۔

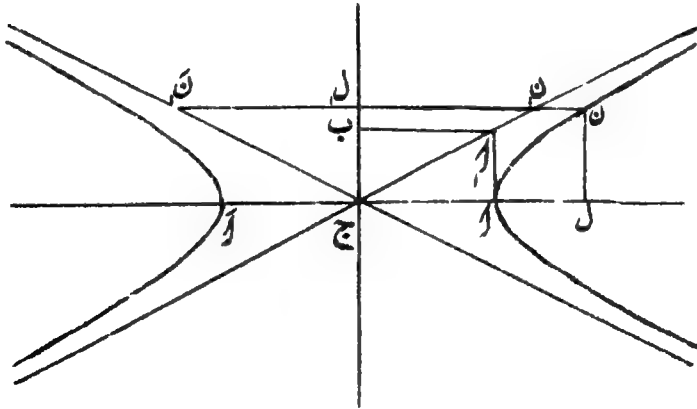
نیز نقطہ و کے دو مقام جو مسئلہ ۲ کی شکل ۱ میں دئے ہیں ان سے صورت دوم مذکورہ بالا کی دو مقابل کی صورتیں حاصل ہونگی۔

تعریف۔ جس قطع زائد کے قاطع اور مزدوج محور بالترتیب ج ب اور ج ا ہوں اس کو مزدوج قطع زائد کہتے ہیں۔

نوٹ - مزدوج ہندولی کے وہی متقارب ہوتے ہیں جو اصلی ہندولی کے ہوں اور اس کی وجہ یہ ہے کہ دونوں صورتوں میں وہ ایک ہی مستطیل کے قطر ہیں۔

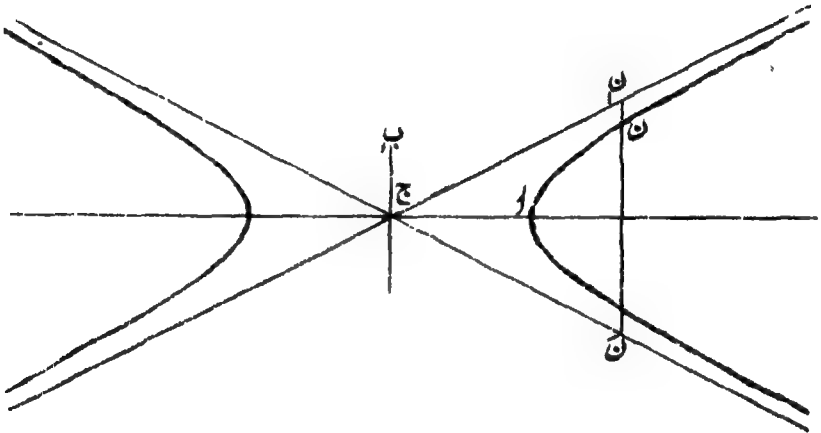
مسئلہ ۲۲

اگر معنی پر کوئی نقطہ ن لیا جائے اور اس نقطہ میں سے ج ا یا ج ب کے متوازی ایک خط کھینچا جائے جو متقاربوں کو ن، ن پر ملے تو ثابت کرو کہ سطح ن ن \times ن ن = بالترتیب ج ا یا ج ب کے مربع کے اگر ن مزدوج قطع زائد پر ہو تو بھی اسی قسم کا ربط درست ہوگا۔



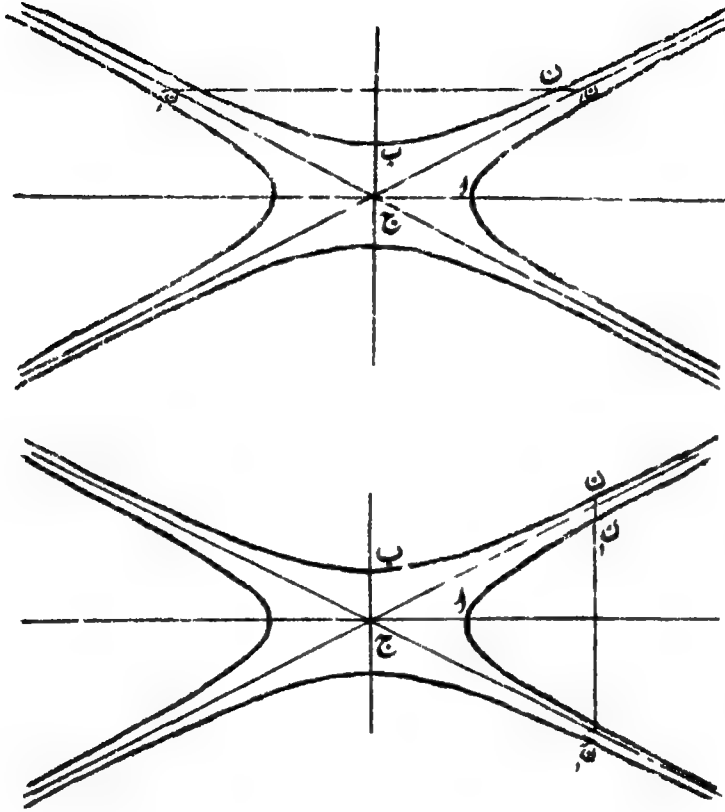
صورت اوّل - ن ن کو ج ا کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ ج ب کو ل پر ملتا ہے
تب ن ل : ج ل - ج ا : ج ب = ج ا : ج ب [مسئلہ ۳]

$$\begin{aligned}
 & \therefore ج ل : ن ل - ج ا = ج ب : ج ا \\
 & \text{نیز } ج ل : ن ل = ج ب : ب ا = ج ب : ج ا \\
 & \therefore ن ل - ج ا = ن ل \\
 & \therefore ن ل - ن ل = ج ا \\
 & \text{یا } ن ن \times ن ن = ج ا
 \end{aligned}$$



صورت دوم $ن ن ن کو ج ب$ کے متوازی کھینچو
 تب $ن ن \times ن ن = ج ب$ [مسئلہ ۴]
 صورت سوم و چہارم چونکہ یہ بات زائد کے دونوں
 محاوروں کے لئے ثابت ہو چکی ہے کہ
 $ن ن \times ن ن = ج ا$ یا $ج ب$ بالترتیب
 اس لئے یہ اُس صورت میں بھی درست ہوگی

اگر ن مزوج قطع زائد پر واقع ہو، ملاحظہ ہوں اشکال ذیل



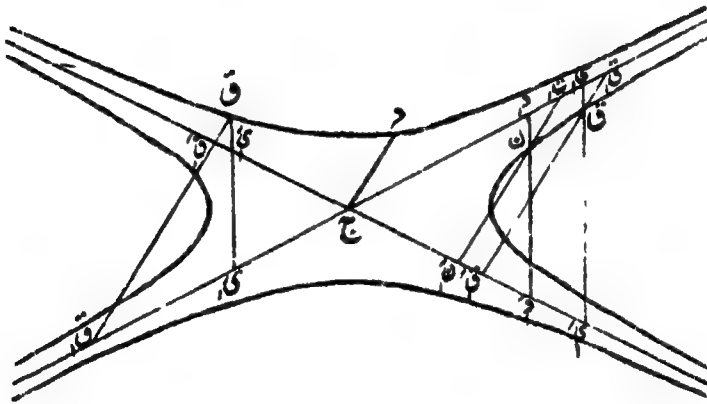
مشقی مثالیں مسئلہ ۲۳

ق قی زائد کا ایک وتر ہے جو ن پر کے ماس کے متوازی ہے،
 ن ن، ق ق، ق قی، ایک متقارب کے متوازی کھینچے گئے ہیں
 اور دوسرے متقارب پر جا کر ختم ہوتے ہیں -
 ثابت کرو کہ ج ق = ج ق = ج ن

مسئلہ ۲۳

اگر منحنی یا اس کے مزدوج پر کے دو نقطوں N اور Q میں سے دو متوازی اور مستقیم خط کھینچے جائیں جو متقاربوں کو بالترتیب N ، N' اور Q ، Q' پر ملیں تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب (سطح)

$$N N' \times Q Q' = Q Q' \times Q Q'$$



سب سے پہلے فرض کرو کہ N اور Q قطع زائد کی ایک ہی شاخ پر واقع ہیں۔

N اور Q میں سے مزدوج محور $J B$ کے متوازی خط کھینچو جو متقاربوں کو D ، D' اور E ، E' پر ملیں۔
متشابه مثلثوں سے

ن ن : ن د = ق ق : ق ی

اور ن ن : ن د = ق ق : ق ی

اس لئے ضرب دینے سے

ن ن × ن ن : ن د × ن د = ق ق × ق ق : ق ی × ق ی

لیکن ن د × ن د = ج ب = ق ی × ق ی [مسئلہ ۲۲]

ن ن × ن ن = ق ق × ق ق

اگر ق 'زائد' یا اس کے مزدوج پر واقع ہو تو یہی اسی قسم کا استدلال صادق آئے گا، دونوں صورتیں شکل میں دکھائی گئی ہیں

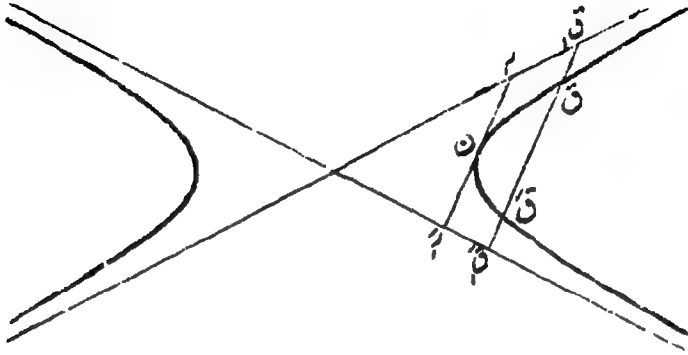
نوٹ - مرکز میں سے ج د کو ق ق یا ن ن کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ منحنی یا اس کے مزدوج کو د پر ملتا ہے تب نقاط د اور ق کے لئے یہ مسئلہ ہو جائے گا۔

ق ق × ق ق = د ج × د ج = ج د

مسئلہ ۲۲

اگر ایک مستقیم خط منحنی کو ق اور ق پر اور متقابلوں کو ق ق پر کاٹے تو ثابت کرو کہ ق ق = ق ق اور اگر ماس ہ ن ہ متقابلوں کو ہ اور ہ پر ملے تو

ن ہ = ن ہ



[مسئلہ ۲۳] $ق ق \times ق ق = ق ق \times ق ق$

$\therefore ق ق \times ق ق + ق ق \times ق ق = ق ق \times ق ق + ق ق \times ق ق$

$\therefore ق ق \times ق ق = ق ق \times ق ق$

$\therefore ق ق = ق ق$

فرض کرو کہ ق ق اس طرح حرکت کرتا ہے کہ وہ ہمیشہ اپنے متوازی رہے اور آخر الامر نقطہ ن پر پہنچتا ہے جہاں وہ مغنی کا ماس بنجاتا ہے۔

چونکہ ہمیشہ $ق ق = ق ق$

اس لئے $ن ن = ن ن$

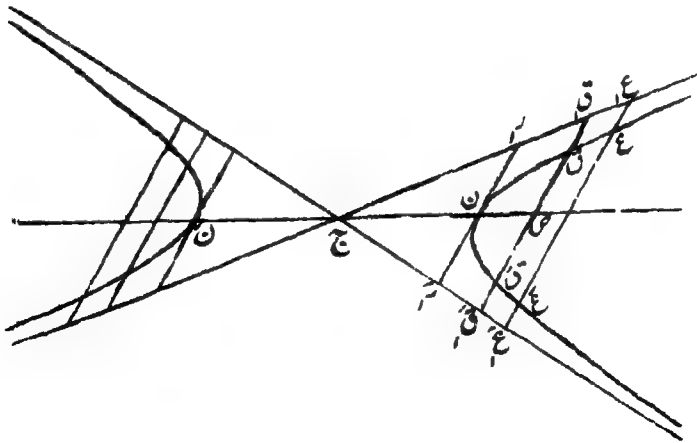
نوٹ۔ اگر ق ق ہڈولی کی مقابل کی شاخوں پر واقع ہوں تو اس صورت میں ق ق کے متوازی مغنی کا کوئی ماس نہ ہوگا۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۲۴

- ۱۔ اگر ق، ق، مزدوج ہندولی پر واقع ہوں تو بھی ق ق = ق ق
- ۲۔ اگر ن پر کا عماد محوروں کو گ، گ پر ملے تو ثابت کرو کہ نفت ط گ، گ، ہ، ہ، ایک ایسے دائرہ پر واقع ہیں جو مرکز میں سے گزرتا ہے

مسئلہ ۲۵

ہندولی کے متوازی وتروں کا ایک نظام دیا ہوا ہے
ثابت کرو کہ وتروں کے وسطی نقاط کا طریق ایک ایسا
مستقیم خط ہے جو مرکز میں سے گزرتا ہے۔
نیز ثابت کرو کہ اگر مستقیم خط کے کسی ایک سرے
پر ماس کھینچا جائے تو وہ وتروں کے متوازی ہوگا



فرض کرو کہ ق ق ، ع ع ، وغیرہ متوازی و تروں کا نظام
ہے متقاربوں کو ق ، ق ، ع ، ع ، وغیرہ پر ملتا ہے ۔
ج ص کو اس طرح کھینچو کہ وہ ق ق کی تنصیف ص پر
کرے

تب ج ص ، ق ق کی بھی تنصیف کرتا ہے کیونکہ ق ق = ق ق
[مسئلہ ۲۳]

اسلئے متشابہ مثلثوں کے ذریعہ یہ ثابت ہوتا ہے کہ
ج ص ، ع ع کی تنصیف کرتا ہے ۔

اسلئے یہ ع ع کی تنصیف کرتا ہے کیونکہ ع ع = ع ع
[مسئلہ ۲۴]

اسلئے ج ص ان سب و تروں کی تنصیف کرتا ہے جو
ق ق کے متوازی ہیں ۔

فرض کرو کہ ج ص سخنی کو نقطہ ن پر ملتا ہے
اور فرض کرو کہ ق ق ، ن کی طرف حرکت کرتا ہے اور
ہمیشہ اپنے متوازی رہتا ہے ۔

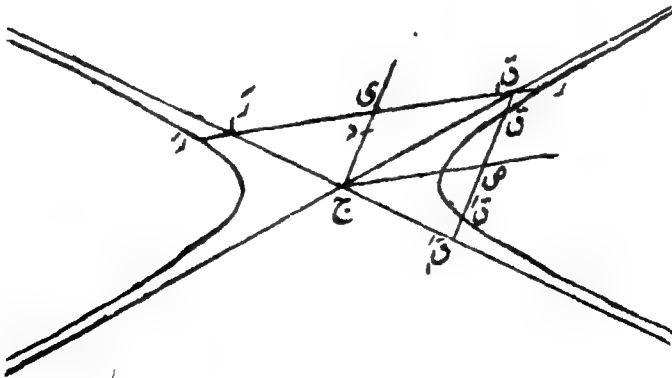
تب چونکہ ج ن ص ہمیشہ ق ق کی تنصیف کرتا ہے
اسلئے ق اور ق آخر الامر نقطہ ن پر منطبق ہوتے ہیں
اسلئے ن پر کا ماس متوازی و تروں کے اُس نظام
کے متوازی ہے جن کا منصف ج ن ص ہے ۔

تعریف اگر ایک مستقیم خط (ج ن) متوازی و تروں
کے ایک نظام کے واسطی نقاط میں سے گزرے تو

اسکو بذلولی کا قطر کہتے ہیں
 تعریف - اگر قطر (ن ج ن) کے ایک سرے پر ماس
 کھینچا جائے اور منحنی کے کسی ایک نقطہ سے ایک
 مستقیم خط (ق ص) ماس کے متوازی کھینچا جائے تو
 اس خط کو قطر کا معین کہتے ہیں
 انتباہ اگر قطر مذکور ناقص کا تقاطع محور ہو تو معین
 کے وہی معنی ہونگے جو عام طور پر سمجھے جاتیں -
 نوٹ قطر کے اُس حصہ کے طول کو جو بذلولی یا اُس کے مزدوج
 کی شاخوں کے درمیان جو بعض اوقات قطر کہتے ہیں

مسئلہ ۲۶

اگر ایک قطران سب وتروں کی تنصیف کرے جو ایک
 دوسرے قطر کے متوازی ہوں تو دوسرا قطران سب



د تروں کی تنصیف کرے گا جو پہلے کے متوازی ہوں۔
فرض کرو کہ جن 'ق ق' کی تنصیف ص پر کرتا ہے
ج د کو ق ق کے متوازی کھینچو۔
ق ق کو اتنا خارج کرو کہ وہ متقاربوں کو ق ق پر ملے۔

ق میں سے جن کے متوازی ایک خط ر ق ہی رہے
کھینچو جو منحنی کو ر اور ر پر اور متقاربوں کو ق ق رہے
پر اور ج د کو ی پر قطع کرے۔

تب چونکہ ق ق = ق ق
اس لئے ق ق کی تنصیف ص پر ہوتی ہے اور ج ص
ق رہے کے متوازی ہے۔

ج ر = ج ق [اقلیدس م ۶ ش ۲]

ر ی = ی ق [اقلیدس م ۶ ش ۲]

اور ر ق ر ق کے مساوی ہے

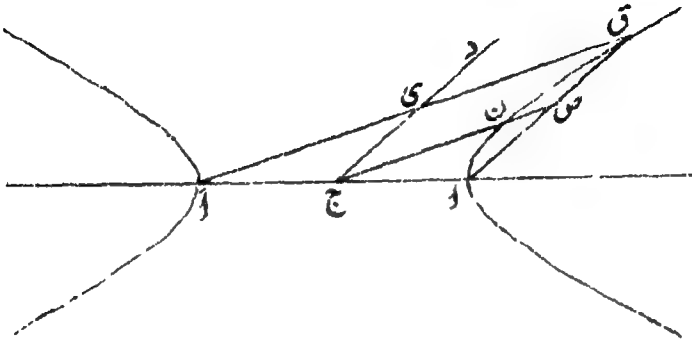
ر ی = ر ی [مسئلہ ۲۴]

اس سے ثابت ہوا کہ ج د اُن سب د تروں کی تنصیف
کرتا ہے جو جن کے متوازی ہوں۔

مسئلہ ۲۶ (متبادل ثبوت)

اگر ایک قطر ایک دوسرے قطر کے متوازی د تروں کی
تنصیف کرے تو دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی د تروں

کی تنصیف کرے گا۔



اق کو ج د کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ج ن کو ص پر ملتا ہے۔

اق کو ملاؤ فرض کرو۔ کہ یہ خط ج د کو ی پر قطع کرتا ہے چونکہ اق کی تنصیف ص پر اور اا کی ج پر ہوتی ہے اسلئے اق، ج ن کے متوازی ہے اور چونکہ ج د، اق کے متوازی ہے اسلئے اق کی تنصیف ی پر ہوتی ہے۔

اس لئے ج د ایک ایسے وتر اق کی تنصیف کرتا ہے جو ج ن کے متوازی ہے

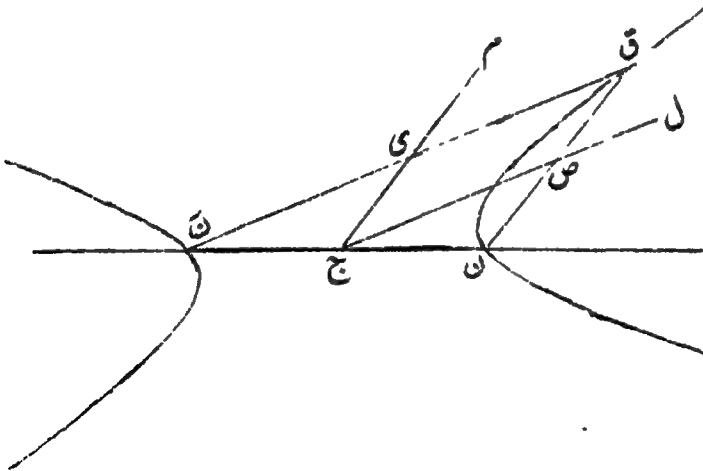
اسلئے ج د ان سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو ج ن کے متوازی ہیں۔

تعریف اگر دو قطروں کا باہمی تعلق ایسا ہو کہ ان میں

سے ہر ایک دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے
تو انکو مزدوج قطر کہتے ہیں
نوٹ اگر دو قطر ایک دوسرے کے مزدوج ہوں تو ان میں سے
ایک قطع زائد کو ملیگا اور دوسرا مزدوج قطع زائد کو
تعریف جو وتر (ق ن، ق ن) قطع زائد کے کسی نقطہ ق
کو ایک قطر (ن ج ن) کے سروں سے ملائیں ان کو
تکمیلی وتر کہتے ہیں

مسئلہ ۲۷

تکمیلی وتر مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں



قطر ج ل، ج م کو تکمیلی اوتار 'ن ق، ق ن' کے متوازی
کھینچو اور فرض کرو کہ وہ انکو 'ی' اور 'ص' پر قطع کرتے

ہیں تب ن ص : ص ق = ن ج : ج ن [اٹھواں مسئلہ]

ن ص = ص ق

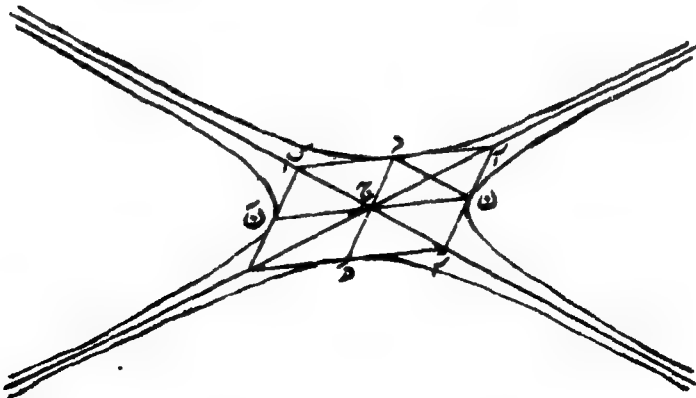
ج ل ' ن ق کی اور نیز اُن تمام وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو ج م کے متوازی ہیں [مسئلہ ۲۵]

اسی طرح ج م اُن تمام وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو ج ل کے متوازی ہیں اسلئے ج ل ' ج م مزدوج قطر ہیں

مسئلہ ۲۸

اگر قطع زائد اور اُس کے مزدوج کے اُن مقامات پر مماس کھینچے جائیں جہاں مزدوج قطر انکو ملتے ہیں تو یہ مماس ایک ایسی شکل متوازی الاضلاع بنائیں گے جس کے رؤس الزوایا متقاربوں پر واقع ہوں گے۔

نیز ثابت کر دو کہ ن د ایک متقارب کے متوازی ہے اور دوسرا متقارب اس کی تنصیف کرتا ہے۔



ماس بہ ن بہ کہینچو جو متقاربوں کو بہ اور
بہ کو ملے۔

ج د کو ملاؤ

تب چونکہ ج د، ج ن کا مزدوج ہے

∴ ج د، بہ بہ کے متوازی ہے

اور چونکہ ج د دونوں متقاربوں کو ج پر ملتا ہے بذریعہ
مسئلہ ۲۳ اس لئے

ج د = ن بہ × ن بہ = ن بہ [مسئلہ ۲۲]

∴ ج د = ن بہ اور یہ ایک دوسرے کے متوازی ہیں

∴ بہ د، ج ن کے متوازی ہے [اقلیدس م اشش ۳۳]

∴ بہ د نقطہ د پر ماس ہے [مسئلہ ۲۵]

اسی طرح سے د اور ن پر کے ماسات متقاربوں پر ملتے

ہیں اور چاروں ماس ملکر ایک متوازی الاضلاع بناتے

ہیں جس کے رؤس الزوایا متقاربوں پر واقع ہیں۔

ن د کو ملاؤ اور فرض کرو کہ بہ د دوسرے متقارب کو

کم پر ملتا ہے۔

تب بہ ن = ن بہ

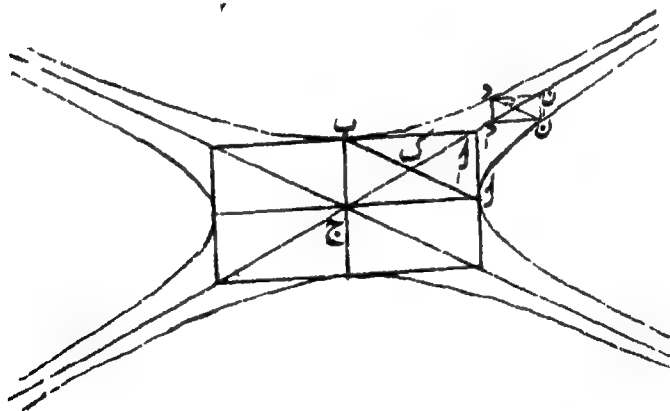
اور بہ د = د کم

∴ ن د، کم بہ کے متوازی ہے۔

اور جن پر د ایک متوازی الاضلاع ہے۔
 ∴ ن کی تنصیف اُس نقطہ پر ہوتی ہے جہاں یہ متقارب
 سے ملتا ہے
 مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ (۱۶۰، ۱۶۱)

مسئلہ ۲۹

اگر ن اور د میں سے محاور کے متوازی مستقیم خط کھینچے
 جائیں تو ان کے ملنے سے ایک ایسا مستطیل بنے گا جس کے
 دو زاویوں کے راس ایک متقارب پر واقع ہونگے



ن کو ج ب کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ
 متقارب کو ن پر ملتا ہے، ن د کو ملاؤ

فرض کرو کہ اب اور ن د متقارب کوک اور و پر
 بالترتیب قطع کرتے ہیں، متقارب، اب اور ن د
 دونوں کی تنصیف کرتا ہے اور وہ ایک دوسرے
 کے متوازی ہیں۔ [مسئلہ ۲۸]

اسلئے ن و ن، د ک د متشابہ مثلث ہیں۔

$$\therefore \text{ن و ن} : \text{د ک د} = \text{ن و} : \text{د ک}$$

$$= \text{ن د} : \text{اب} \quad [\text{مسئلہ ۲۸}]$$

اور زاویہ ن و ن د = زاویہ د ک د اب

اسلئے مثلث ن و ن د، د ک د متشابہ ہیں

[اقطیس م ۶ ش ۶]

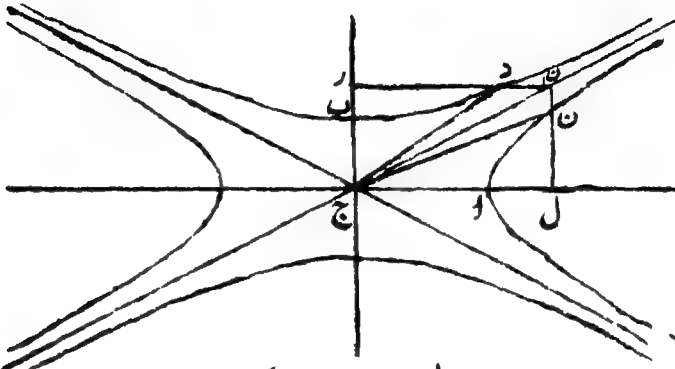
اسلئے ن د، د ک د یعنی ج د کے متوازی ہے۔

اسی طرح سے اگر د م کو ج ب کے متوازی کھینچا جائے

تو ن د ج د کے متوازی ہوگا۔

مسئلہ ۳۰

ج ن - ج د = ج ا - ج ب



محاور پر معین ن ل اور در کھینچو اور ان کو اتنا خارج کرو کہ وہ ن پر ملیں تب ن متقارب پر واقع ہوگا۔

[مسئلہ ۲۹]

[مسئلہ ۲۳]

[اقطیس م اشش ۴۷]

[مسئلہ ۲۳]

[اقطیس م اشش ۴۷]

تب ج ب = ن ل - ن ل

= ج ن - ج ن

نیز ج ا = ن ل - د ر

= ج ن - ج د

∴ ج ا - ج ب = ج ن - ج د

مشقی مثالیں مسئلہ ۲۸

ثابت کرو کہ قائم قطع زائد میں

۱- ج ن = ج د اور متقارب کسی دو مزدوج قطرون کے درمیانی

زادے کی تنصیف کرتے ہیں

۲- ج ن اور ج د محاورے تکمیلی زادے بناتے ہیں

۳- جو قطر ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں وہ مساوی ہوتے ہیں۔

۴- کسی دو قطروں کا درمیانی زاویہ ان کے مزدوج قطروں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوتا ہے۔

۵- کسی وتر کے محاذی قطر ن کے سرے پر جو زاویے بنیں وہ یا تو مساوی ہونگے یا ایک دوسرے کے مکمل

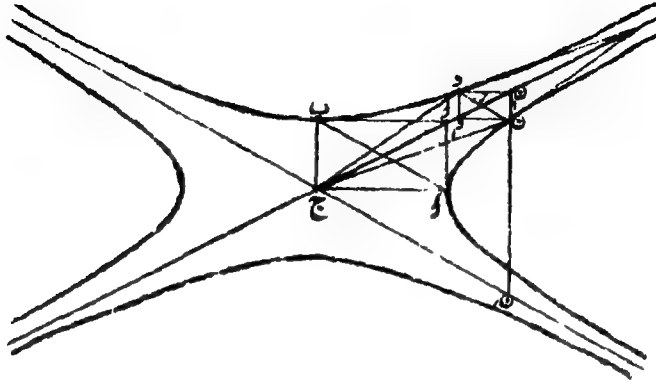
۶- اگر ایک قائم الزاویہ قطع زائد ایک مثلث کے گرد بنایا جائے تو اس کا مرکز کا طریق نوشتہ دائرہ ہوگا۔

مسئلہ ۳۱

اگر قطع زائد کا کوئی محاس بہ ن بہ متقاربوں کو بہ اور بہ پر ملے تو ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع ج ن بہ د کا رقبہ مستقل ہے

(یعنی $ن ف \times ج د = ا ج \times ب ج$)

نیز مثلث بہ ج بہ کا رقبہ مستقل ہے



۱۱۱ 'ب' کو محاور کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ متقارب کو لپٹتے ہیں۔

قطع زائد کے نقطہ ن میں سے گنا معین کھینچو جو متقاربوں کو 'ن' پر ملے۔

متوازی الاضلاع د ن د کی تکمیل کرو، د ن کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ متقارب کو نقطہ د پر ملتا ہے، 'ب' کو ملاؤ

تب $\triangle د ج ن : \triangle د ن ج = ج و : د ن$
 $= ن ن : ن ن$

[اقلیدس م ۶ ش ۲]

نیز $\triangle ب ج ا : \triangle د ن ج = ب ج : ن ن$ [اقلیدس م ۶ ش ۱]

$= ن ن \times ن ن : ن ن$

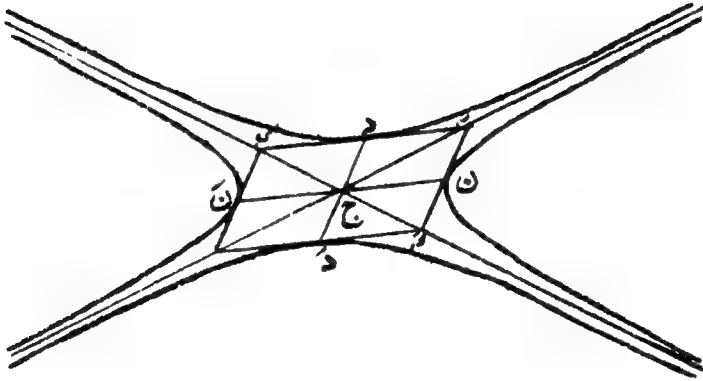
[مسئلہ ۲۲]

$$ن : ن : ن =$$

اسلئے مثلث د ج ن = مثلث ب ج ا

∴ متوازی الاضلاع ج ن د = متوازی الاضلاع ج ا ب
جس کا رقبہ مستقل ہے

$$یا ن د \times ج د = ا ج \times ب ج \quad [دیکھو شکل مسئلہ ۱۶]$$



نیز مثلث ب ج د = متوازی الاضلاع ج ن د
کیونکہ ان میں سے ہر ایک مقدار میں اس متوازی الاضلاع
کی ایک چوتھائی ہے جو نقاط ن د ن د پر ماس
کھینچنے سے بنتا ہے

اسلئے مثلث ب ج د کا رقبہ مستقل ہے

مشقی مثالیں مسئلہ ۳۱

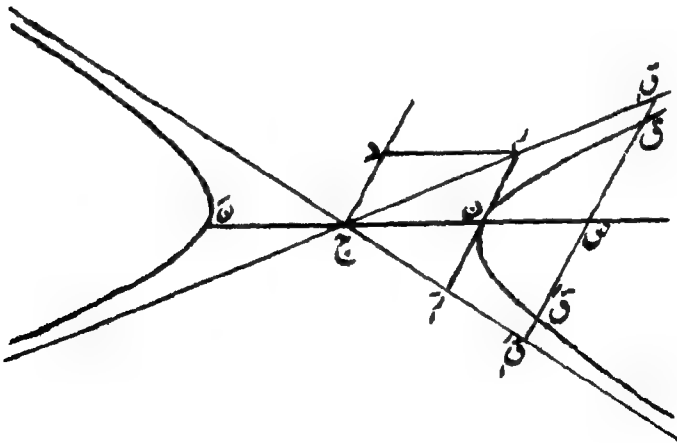
۱۔ اگر ن د ا ن د ایک متقارب کے متوازی اس طرح کھینچے

جائیں کہ دوسرے متقارب پر ختم ہوں تو $n \times n = \frac{1}{4} ج س$
 ۲۔ اگر دو متقارب اور منحنی پر کے ایک نقطہ (تینوں) کے مقام
 معلوم ہوں تو محور اور اسکے دریافت کرو۔

۳۔ ہڈولی کے دو ماس متقاربوں کو $r, p, ط, ط$ پر بالترتیب
 ملتے ہیں ثابت کرو کہ $r ط, ط$ کے متوازی ہے
 ۴۔ ایک قائم قطع زائد میں اگر n پر کے ماس پر عمود $ج$ مے
 نکالا جائے تو ثابت کرو کہ $ج مے \times ج ن = ج د$

مسئلہ ۳۲

ق ص قطر ن جان کا معین ہے اور ق ص کے متوازی
 قطر ج د ہے ثابت کرو کہ
 $ق ص : ن ص = ج د : ج ن$



فرض کرو ق ص متقاربوں کو ق، ق پر ملتا ہے، ن
اور د پر کے ماس کھینچو جو متقارب کو د پر ملیں۔ [مسئلہ ۲۸]
تب ج د = ق ق × ق ق [مسئلہ ۲۳]

$$= ق ص - ق ص$$

$$∴ ق ص = ق ص - ج د$$

$$نیز ن ص × ن ص = ج ص - ج ن$$

متشابه مثلثات ج ن د، ج ص ق سے

$$ج ص - ج ن : ج ن = ق ص - ن د : ن د$$

$$= ق ص - ج د : ج د$$

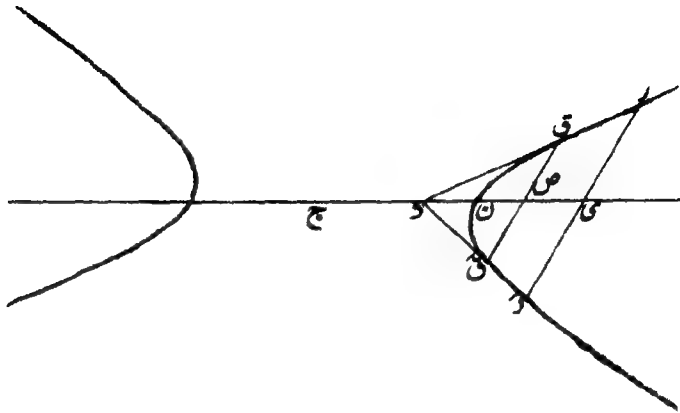
$$∴ ن ص × ن ص : ج ن = ق ص : ج د$$

تبدیل نسبت سے ق ص : ن ص × ن ص = ج د : ج ن

تمام قطع زائدیں ق ص = ن ص : ن ص

مسئلہ ۳۳

کسی وتر کے سروں پر کے ماس اس قطر پر ملتے ہیں
جو وتر کی تنصیف کرتا ہے۔



فرض کرو کہ ق ق اور ر ر دو متوازی وتر ہیں، ر ق اور
 ر ق کو ملاؤ اور انکو اتنا خارج کرو کہ وہ وپر ملیں۔
 ق ق کی تنصیف ص پر کرو اور فرض کرو کہ و ص ممدودہ
 ر ر کو ی پر ملتا ہے۔
 متشابہ مثلثوں سے

$$ق ص : ر ی = و ص : و ی$$

$$= ق ق : ر ی$$

$$\text{لیکن } ق ص = ق ق$$

$$: ر ی = ر ی$$

چونکہ ص ی متوازی وتروں ق ق، ر ر کی تنصیف کرتا ہے
 اسلئے یہ ایک قطر ہے اور مرکز ج میں سے گزرتا ہے۔

[مسئلہ ۲۵]

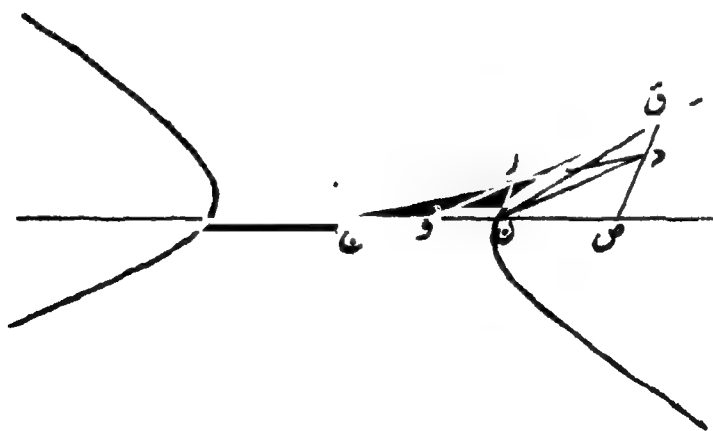
فرض کرو کہ ر، ر حرکت کر کے آخر کار ق، ق پر منطبق

ہوتے ہیں اس وقت وقی روقی ر با ترتیب ق
اور ق پر کے حاس بن جائیں گے اور قطر ج ص پر
ہی ایک دوسرے کو قطع کرینگے۔

اگر کسی مخروطی تراش میں کوئی قطر مرتب کوئے پر ملے تو
اس سے ان وتروں پر عمود ہوگا جن کی تنصیف قطر
مذکور کرتا ہے۔

سندھ

ق ص قطر جن کا معین ہے اگر ق پر کا ماس
جن کو پر لے تو ثابت کر دو کہ
ج ص \times ج و = ج ن



ن د کو وق کے اور ن ر کو ص ق کے متوازی کھینچو
ن ق کو ملاؤ۔

تب ن ر قطع زائد کو مس کرتا ہے [مسئلہ ۲۵]
 ر ن د ق ایک متوازی الاضلاع ہے، اسلئے ر د
 ن ق کی تنصیف کرتا ہے اور اسلئے ر د مرکز ج میں
 سے گزرتا ہے۔ [مسئلہ ۳۳]

اب ج و : ج ن = ج ر : ج د [اقلیدس م ۶ ش ۲]
 ج ن : ج و = ج ر : ج د [اقلیدس م ۶ ش ۲]
 اسلئے ج ن = ج د × ج و

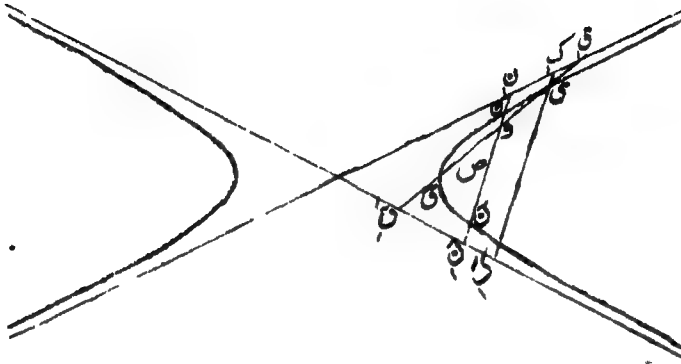
مشقی مثالیں مسئلہ ۳۵

- ۱۔ اگر ایک قائم قطع زائد مثلث کے گرد بنایا جائے تو ثابت کرو کہ وہ مثلث کے مرکز عودی میں سے گزرتا ہے۔
- ۲۔ اگر و ر کو ایک متقارب کے متوازی کھینچا جائے اور وہ منحنی کو ر پر اور دوسرے متقارب کو ب پر ملے اگر و ن کو ایک ثابت مستقیم خط کے متوازی کھینچا جائے اور و ن منحنی کو ن اور ن پر ملے تو ثابت کرو کہ و کے تمام مقامات کے لئے حاصل ضرب و ن × و ن ایسی بدلتی ہے جیسے و ر × ج ب [اور مشقی مثالوں کے لئے دیکھو قطع ناقص کی بحث میں مسئلہ ۳۴]

مسئلہ ۳۵

اگر قطع زائد کے دو وتر ایک دوسرے کو قطع کریں تو ان کے حصوں کی سطوح (حاصل ضربوں) کو آپس میں

وہی نسبت ہوگی جو ان کے متوازی نصف قطروں کے
مربعوں کو آپس میں ہے۔



فرض کرو کہ وتر $ن و ن$ ، $ق و ق$ متقاربوں کو $ن$ ، $ن$ اور
 $ق$ ، $ق$ پر ملتے ہیں $ن ن$ کی تنصیف $ص$ پر کرو، $ق ق$ کی
کو $ن ن$ کے متوازی کھینچو

تب $ن و ن \times و ن = ن ص^2 - و ص^2$ [اقلیدس م ۲، ش ۵]

$ن و ن \times و ن = ن ص^2 - و ص^2$ [اقلیدس م ۲، ش ۵]

$ن و ن \times و ن - ن و ن \times و ن = ن ص^2 - ن ص^2$

$= ن ن \times ن ن$

[اقلیدس م ۲، ش ۵]

$ن و ن \times و ن - ن و ن \times و ن = ن و ن \times و ن$

اسی طرح سے $ق و ق \times و ق - ق و ق \times و ق = ق و ق \times و ق$
مشابہ مثلثوں سے

ن و : ق و = ک ق : ق ق

ون : وق = ق ک : ق ق

اور

ن و و ون : ق و و وق = ک ق ک ق : ق ق ق ق

ن ن و ن ن : ق ق ق ق = [مسئلہ ۲۳]

ن و و ون - ن ن و ن : ق و و وق - ق ق ق ق

ن ن و ن ن : ق ق ق ق

ن و و ون : ق و و وق = ن ن و ن : ق ق ق ق

= متوازی نصف فقرون کے مربعوں کی نسبت کے

[مسئلہ ۲۴]

مسائل جو خاص طور پر قائم قطع زائد کے متعلق ہیں

۱- ج س = ہ ج ا ، ج س = ہ ج لا ، ر = ا

۲- ن ل = ا ل × ل ا

۳- وتر خاص = ا ا

۴- ج ل = ل گ

۵- ثابت کرو کہ ایک دائرہ جس کا مرکز منحنی پر کا کوئی نقطہ ن ہو اور نصف قطر ن ج ، وہ عماد کو محاور پر اور تماس کو متقاربوں پر قطع کریگا۔

ن ج = ن گ = ن گم = ن ہ = ن ہ

۶- مزدوج قطر مساوی ہوتے ہیں اور متقارب ایک

درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتے ہیں۔

۷- مزدوج قطر کسی ایک محور سے ایسے زاوے بناہیں

جو ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

۸۔ قائم الزاویہ قطر مساوی ہوتے ہیں

۹۔ کسی دو قطروں کا درمیانی زاویہ ان کے مزدوج قطروں

کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوتا ہے

۱۰۔ ایک قطر n کے سروں پر کسی وتر کے محاذی

جو زاوئے بنیں وہ یا تو مساوی ہوتے ہیں یا ایک دوسرے

کے مکمل۔

۱۱۔ اگر n پر کے مماس پر j مے عمود نکالا جائے تو

$j \times j = n$

۱۲۔ اگر ایک قائم ہندولی ایک مثلث کے گرد کھینچ

سکے تو یہ مثلث کے مرکز عمودی میں سے گزرے گا۔

۱۳۔ اگر ایک قائم ہندولی ایک مثلث کے گرد بنایا

جائے تو اس کے مرکز کا طریق نو نقطہ دائرہ ہوگا۔

اسطوانہ اور مخروط

اگر ایک مستطیل کو اس کے ایک ضلع کے گرد پھرایا جائے تو مقابل کا ضلع ایک ایسی سطح مرتسم کرتا ہے جس کو قائم مستدیر اسطوانہ کہتے ہیں۔
 ہم مستطیل اور اس کے طول کو دونوں طرف لا تناہی تک پھیلا ہوا خیال کر سکتے ہیں جس ثابت ضلع کے گرد مستطیل چکر لگاتا ہے اسکو اسطوانہ کا محور کہتے ہیں۔

تعریف اگر ایک مستقیم خط دائرہ کے محیط کے گرد حرکت کرے اور ہمیشہ ایک ایسے ثابت مستقیم خط کے متوازی رہے جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہو اور سطح دائرہ پر عمود ہو تو جو سطح یہ متحرک مستقیم خط مرتسم کریگا اس کو قائم مستدیر اسطوانہ کہتے ہیں۔
تعریف اس ثابت مستقیم خط کو اسطوانہ کا محور کہتے ہیں

نوٹ۔ اگر ایک سطح مستوی اسطوانہ کو محور کے متوازی کاٹے تو اس تراش اسطوانہ کے دو مؤلّد خط حاصل ہوں گے اگر کاٹنے والی مستوی سطح محور پر عمود ہو تو تراش دائرہ ہوگی۔

تعریف اگر ایک سطح مستوی ایک اسطوانہ کو کاٹے تو جو سطح مستوی اسطوانہ کے محوریوں سے گزرتی ہو اور کاٹنے والی سطح پر عمود ہو اسکو محوری سطح کہتے ہیں

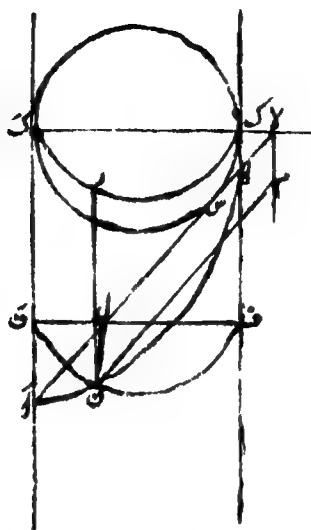
نوٹ محوری سطح اور کاٹنے والی سطح کا خط تقاطع تراش (کے منحنی) کا محور ہوتا ہے اور محوری سطح اور اسطوانہ کا تقاطع دو مؤلّد خط ہوتے ہیں

تعریف اگر ایک کرہ اسطوانہ کے اندر اس طرح بنایا جائے کہ وہ اسطوانہ کو ایک دائرہ کے ہر ایک نقطہ پر مس کرے اور کاٹنے والی سطح کو ایک نقطہ پر مس کرے تو اس کو ماسکی کرہ کہتے ہیں

مسئلہ ۱

اگر ایک قائم مستدیر اسطوانہ کو ایک ایسی سطح مستوی سے کاٹا جائے جو محور سے کوئی زاویہ بناتی ہو تو تراش قطع ناقص ہوگی۔

فرض کرو کہ تراش کا منحنی AN ہے،



فرض کرو کہ محوری سطح کاغذ کی سطح ہے اور یہ
کاٹنے والی سطح کو خط مستقیم AB پر اور اسطوانہ
کو تو لیدی خطوط AC ، AD ، AE ، AF پر ملتی
ہے۔

ہے۔ ایک ماسکی کرہ کہیں جو اسطوانہ کو دائرہ ک رک کے ہر ایک نقطہ پر اور کاٹنے والی سطح کو سس پر سس کرے

فرض کر کہ سطح مستویہ کا رک، اُن پر
ایک دوسرے کو خط مستقیم لام پر قطع کرتی
ہیں

ہیں منحنی ان کے کسی نقطہ ن میں سے
ایک ایسی مستوی سطح و ن و ن ل کہیں جو

جو مخروط اسطوانہ پر عمود ہو کائنات والی سطح کو
خط مستقیم ن ل پر ملے محوری سطح کو مستقیم خط
ن ل ف پر ، اور اسطوانہ کو دائرہ ن ف
پر ملے ۔

نقطہ ن میں سے تولیدی خط ن ر کھینچو
جو ماسکی کرہ کو ر پر مس کرے ، نیز ن م کو ل کا
کے متوازی کھینچو

فرض کرو کہ س ن کو ملایا گیا ہے
چونکہ سطوح مستویہ ا ن ر ، ن ف دولوں
محوری سطح پر عمود ہیں اس لئے ن ل محوری
سطح پر عمود ہے (اقلیدس م ۱۱ ش ۱۹) اس لئے
ن ل ، ر اور ف ف دولوں پر عمود ہے
اگر ایک ہی نقطہ سے کرہ کے ماس کھینچے
جائیں تو وہ سب مساوی ہوتے ہیں (اقلیدس م ۳ ش ۴)

∴ س ن = ن ر = ف ک

اور س ل = ل ک اور ن م = ل ل

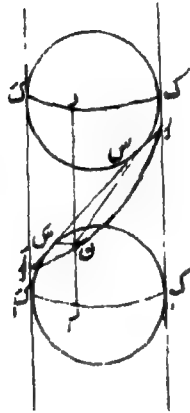
لیکن ف ک : ل ل = اک : ا ل [اقلیدس م ۶ ش ۲]

∴ س ن : ن م = س ل : ل ل

اب اک ، ل ل سے طول میں کم ہے [اقلیدس م ۵ ش ۹]
اس لئے س ل : ل ل ایک ایسی مستقل نسبت
ہے جو ایک سے کم ہے اور ل ل : اک ایک قطع ناقص ہے

جس کا ماسکہ س ہے اور مرتب لام

مسئلہ ۱ (دوسرا طریقہ)



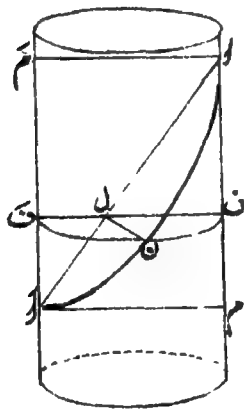
فرض کرو کہ ان دو تراش کا منحنی ہے ، فرض کرو کہ
مخوری سطح کاغذ کی سطح پر منطبق ہوتی ہے اور
کاٹنے والی سطح کو خط مستقیم ا د پر اور اسطوانہ
کو تولیدی خطوط ک اک ، ک اک پر ملتی ہے
دو ماسکی گڑے کھینچو جو اسطوانہ کو دوائر
ک ر ک ، ک ب ک ، کے گرد اور کاٹنے والی
سطح کو س اور س پر مس کریں ۔

منحنی ان دو کے کسی نقطہ ن میں سے
ایک تولیدی خط ر ن ب کھینچو جو ماسکی کرہ کو
ر ، ب پر مس کرے ن س ، ن س کو ملاؤ ،

خطوط بھی ماسکی کروں کو مس کرینگے
تب $س ن = ن ر$ کیونکہ یہ کرہ تھے ماس
اور $س ن = ن ر$

• $س ن + س ن = ن ر + ن ر = ر ر = ک ک$
لئے منحنی مذکور قطع ناقص ہے اسکے ماسکے
ماس ہیں اور اس کا محور اعظم ک ک
ہے (مسئلہ ۴ قطع ناقص)

مسئلہ ۱ (تیسرے طریقہ)



ض کرو کہ $ان$ تراش کا منحنی ہے
ری سطح کو کاغذ کی سطح پر منطبق خیال کرو
فرض کرو کہ یہ کاٹنے والی سطح کو خط مستقیم

۱) اور اسطوانہ کو تولیدی خطوط $\Delta\Gamma\text{م}$ ، $\Delta\Gamma\text{م}$ پر ملتی ہے
 منحنی کے کسی نقطہ Δ میں سے ایک
 سطح $\Delta\Gamma\text{ن}$ $\Delta\Gamma\text{ل}$ کھینچو جو اسطوانہ کے محور
 پر عمود ہو، کاٹنے والی سطح کو خط مستقیم $\Delta\Gamma\text{ن}$
 محوری سطح کو خط مستقیم $\Delta\Gamma\text{ل}$ اور اسطوانہ
 کو دائرہ $\Delta\Gamma\text{ن}$ $\Delta\Gamma\text{ل}$ پر ملے
 $\Delta\Gamma\text{م}$ اور $\Delta\Gamma\text{م}$ کو $\Delta\Gamma\text{ک}$ کے متوازی کھینچو جو
 سطوح $\Delta\Gamma\text{ل}$ $\Delta\Gamma\text{ک}$ ، $\Delta\Gamma\text{ل}$ دونوں محوری سطح
 پر عمود ہیں اسلئے $\Delta\Gamma\text{ن}$ محوری سطح پر عمود ہے
 (اقلیدس م ۹ ش ۱۹)
 اسلئے $\Delta\Gamma\text{ن}$ ، $\Delta\Gamma\text{ل}$ اور $\Delta\Gamma\text{ل}$ دونوں پر عمود ہے۔
 متشابہ مثلثوں سے۔

$$\Delta\Gamma\text{ل} : \Delta\Gamma\text{ن} = \Delta\Gamma\text{ل} : \Delta\Gamma\text{م}$$

$$\text{اور } \Delta\Gamma\text{ل} : \Delta\Gamma\text{ن} = \Delta\Gamma\text{ل} : \Delta\Gamma\text{م}$$

$$\Delta\Gamma\text{ل} \times \Delta\Gamma\text{ل} : \Delta\Gamma\text{ل} \times \Delta\Gamma\text{ن} = \Delta\Gamma\text{ل} \times \Delta\Gamma\text{ل} : \Delta\Gamma\text{ل} \times \Delta\Gamma\text{م}$$

$\Delta\Gamma\text{ل} \times \Delta\Gamma\text{ل} : \Delta\Gamma\text{ل} \times \Delta\Gamma\text{ن} = \Delta\Gamma\text{ل} \times \Delta\Gamma\text{ل} : \Delta\Gamma\text{ل} \times \Delta\Gamma\text{م}$ [اقلیدس م ۳ ش ۲۵]
 پس معلوم ہوا کہ تراش مجوزہ قطع ناقص ہے جس کا
 محور اعظم $\Delta\Gamma\text{ل}$ ہے اور محور اصغر $\Delta\Gamma\text{م}$ [قطع ناقص مسئلہ ۳]

اگر ایک قائم الزاویہ مثلث اپنے ایک ضلع کے گرد جو زاویہ قائمہ کا ایک طرف سے احاطہ کرتا ہو چکر لگائے تو مثلث کا وتر ایک ایسی سطح مرتسم کرتا ہے جس کو قائم مستدیر مخروط کہتے ہیں
 وتر کے طول کو ہم دونوں طرف غیر متناہی قائم تک پھیلا ہوا خیال کر سکتے ہیں۔
 جس ثابت ضلع کے گرد مثلث چکر لگاتا ہے اسکو مخروط کا محور کہتے ہیں۔

مثلث کے اس زاویہ کو جہاں وتر اور ثابت ضلع ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں مخروط کا راس کہتے ہیں
 اگر وتر کو راس کے دونوں طرف غیر متناہی قائم تک خارج کیا جائے تو اس طرح سے جو مکمل مخروط بنتا ہے اس کے دو مساوی اور متشابہ اوراق راس کے مقابل کی جانبوں میں ہوتے ہیں
 تعریف اگر ایک مستقیم خط ایک دائرہ کے محیط کے گرد حرکت کرے اور ہمیشہ ایک ایسے ثابت مستقیم خط کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے جو دائرہ کے مرکز میں سے گذرتا ہو اور سطح دائرہ پر عمود ہو تو جو سطح یہ متحرک مستقیم خط مرتسم کریگا اس کو

قائم مستدیر مخروط کہتے ہیں
تعریف اس ثابت مستقیم خط کو مخروط کا
 محور کہتے ہیں
تعریف محور کے نقطہ ثابتہ کو مخروط کا راس
 کہتے ہیں

نوٹ اگر مخروط کو ایک ایسی سطح سے کاٹا جائے
 جو راس میں سے گذرتی ہو تو مخروط کی تراش ایک
 نقطہ یا اس کے دو تولیدی خط ہوں گے اگر یہ سطح
 محور پر عمود ہو اور راس میں سے نہ گذرے تو
 تراش دائرہ ہوگی

تعریف اگر ایک سطح ایک مخروط کو کاٹے
 تو جو سطح مخروط کے محور میں سے گذرتی ہو
 اور کاٹنے والی سطح پر عمود ہو اسکو **محوری سطح**
 کہتے ہیں

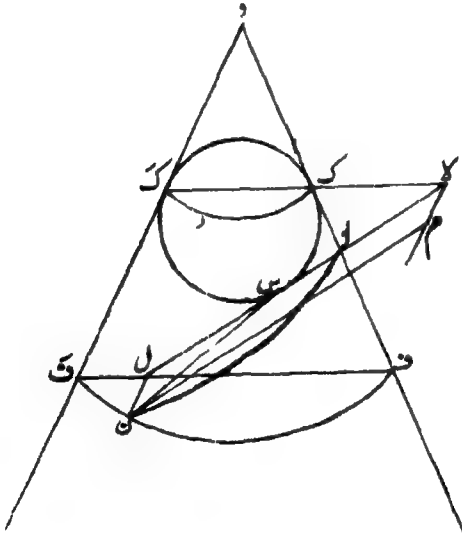
نوٹ محوری سطح اور کاٹنے والی سطح کا خط تقاطع
 تراش کے منحنی کا محور ہوتا ہے اور محوری سطح
 اور مخروط کے تقاطع سے مخروط کے دو تولیدی خط
 حاصل ہوتے ہیں۔

تعریف اگر ایک کرہ مخروط کے اندر ایسا
 بنایا جائے جو مخروط کو ایک دائرہ کے ہر ایک
 نقطہ پر اور کاٹنے والی سطح کو ایک نقطہ پر

مس کرے تو اس کرہ کو ماسکی کرہ کہتے ہیں

مسئلہ ۲

اگر ایک مخروط کو ایک ایسی سطح سے کاٹیں جو اس میں سے نہ گذرتی ہو اور محور پر عمود نہ ہو تو اس طرح سے جو تراش حاصل ہوگی وہ تراش مخروطی کی تعریف کو پورا کرے گی
(سن = ر × ن م)



فرض کرو کہ تراش کا منحنی ان ہے محوری سطح کو کاغذ کی سطح پر منطبق خیال کرو اور فرض کرو کہ یہ کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط لایا پر اور مخروط کو تولیدی خطوط وکتا و ف

و ک ف پر ملتی ہے۔

ایک ماسکی کرہ کھینچو جو مخروط کو دائرہ
ک ر ک کے گرد اور کاٹنے والی سطح کو
س پر مس کرے

فرض کرو کہ سطح ک ر ک اور ن
ایک دوسرے کو مستقیم خط کام پر قطع
کرتی ہیں۔

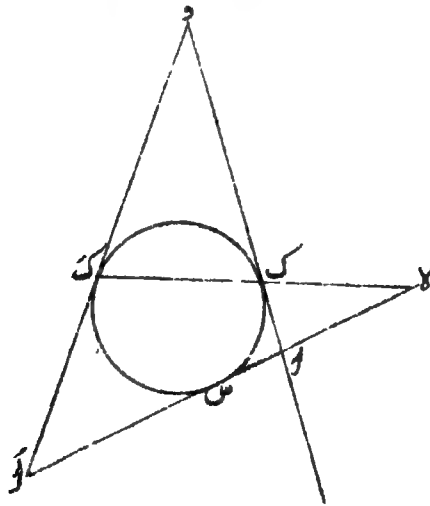
منحنی ا ن کے کسی نقطہ ن میں سے
ایک سطح ف ن ف ل کھینچو جو مخروط کے محور
پر عمود ہو اور کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط
ن ل پر، محوری سطح کو مستقیم خط ف ن ف
پر اور مخروط کو دائرہ ف ن ف پر ملے
فرض کرو کہ تولیدی خط ن ر د کھینچا گیا ہے
یہ ماسکی کرہ کو ر پر مس کرے گا۔

نیز ن م کو ل لا کے متوازی کھینچو۔
چونکہ سطح ا ن، ف ن ف دو نوں محوری سطح
پر عمود ہیں اس لئے ن ل محوری سطح پر
عمود ہے (اقلیدس م ۱۱ ش ۱۹)

اس لئے ن ل، ا ل اور ف ن ف دو نوں پر عمود ہے
اگر ایک ہی نقطہ سے کرہ پر ماس کھینچے جائے
تو وہ سب مساوی ہوتے ہیں [اقلیدس م ۳ ش ۳۶]

اس لئے $س ن = ن ر = ن ک$
 اور $س ل = ل ک$ اور $ن م = م ل$
 لیکن $ن ک : ل ک = ل ک : ل ا$ [اقلیدس م ۶ ش ۲]
 ∴ $س ن : ن م = م ل : ل ا$
 اس لئے $ا ن$ و تراش مخروطی ہے جس کا ماسک
 س ہے اور مرتب لام

مسئلہ ۳
 مخروط کی ایک مستوی تراش قطع ناقص ہوگی
 اگر اس کا ماسکی محور محوری سطح پر کے دونوں
 تولیدی خطوں کو مخروط کے ایک ہی ورق
 پر ملے، یہ تراش مکافی ہوگی اگر اس کا ماسکی



محور ان دو تولیدی خطوں میں سے ایک کے

متوازی ہو، اور یہ تراش قطع زائد ہو گی اگر اس کا ماسکی محور ان تولیدی خطوں کو ملے مگر مخروط کے مختلف درقون پر۔

فرض کرو کہ محوری سطح کا ٹٹنے والی سطح کو Δ پر ماسکی کرہ کو دائرہ k سے s پر، اور مخروط کو تولیدی خطوط Δk ، Δk پر ملتی ہے، k اور s کو اتنا خارج کرو کہ وہ مرتب کے

پائین Δ پر ملیں
صورت اول اس کو اتنا خارج کرو کہ Δk کو Δ پر ملے

زاویہ Δk کے زاویہ $k \Delta$ [اقلیدس م اش ۱۶]

لیکن زاویہ $\Delta k =$ زاویہ Δk [اقلیدس م اش ۵]

$=$ زاویہ Δk [اقلیدس م اش ۱۵]

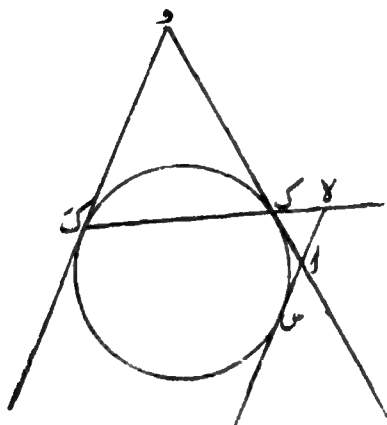
\therefore زاویہ Δk کے زاویہ $k \Delta$ یا $k \Delta$

$\therefore \Delta k > \Delta$ [اقلیدس م اش ۱۹]

$\therefore s > \Delta$ [اقلیدس م ۳ ش ۳۶]

اس لئے منحنی قطع ناقص ہے

صورت دوم۔ اگر $ل$ س، $و$ ک کے متوازی ہو



زاویہ $ل$ ک $ل$ = زاویہ $و$ ک $ک$

= زاویہ $و$ ک $ک$

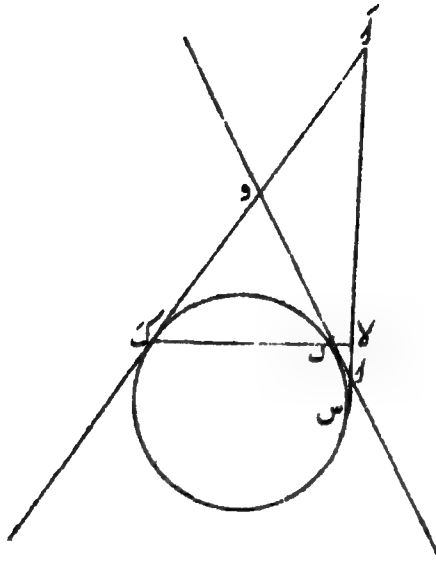
= زاویہ $ک$ ل $ل$ [اقلیدس م ۱ ش ۲۹]

∴ $ل$ ک = $ل$ ل [اقلیدس م ۱ ش ۵]

∴ $س$ ل = $ل$ ل [اقلیدس م ۳ ش ۲۶]

اور منحنی قطع مکانی ہے۔

صورت سوم $س$ ل کو اتنا خارج کرو کہ وہ $ک$ و ممدودہ کو $ل$ پر ملے

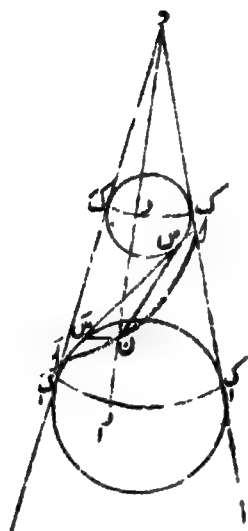


زاویہ وک لا $>$ زاویہ ک لا [اقلیدس م اش ۱۳]
 لیکن زاویہ وک لا $=$ زاویہ وک ک [اقلیدس م اش ۵]
 $=$ زاویہ اک لا [اقلیدس م اش ۱۵]
 ۱۰ زاویہ اک لا $>$ زاویہ ک لا ۱ یا ک لا ۱
 ۱۱ اک لا $<$ لا [اقلیدس م اش ۱۹]
 ۱۲ س لا $<$ لا [اقلیدس م ۳ اش ۳۶]
 اور منحنی قطع زائد ہے

مسئلہ ۳

مخروط کی ناقص تراش کا محور اعظم ماسکی کروں کے
 اس درمیانی فاصلے کے مساوی ہوتا ہے جو مخروط کے

ایک مولد پر ناپا جائے۔



فرض کرو کہ ان ۱۰ تراش کا منحنی ہے ، محوری
سطح کو کاغذ کی سطح پر منطبق خیال کرو اور فرض
کرو کہ یہ کاٹنے والی سطح کو خط مستقیم ۱۰ پر
اور مخروط کو تولیدی خطوط ک ۱ ک ۱۰ پر
متمی ہے دو ماسکی کرتے کھینچو جو مخروط کو دوائے
ک ر ک ۱ ک ۱۰ پر اور کاٹنے والی سطح کو
س اور س ۱ پر ملیں

منعنی ان اُن کے کسی نقطہ ن میں سے ایک
تولیدی خط لے کر م کھینچو جو ماسکی کروں کو رُہ
پرس کرے

ن س ، ن س کو ملاؤ ، یہ بھی ماسکی

کروں کو مس کرینگے۔
تب $س ن = ن ر$ کیونکہ یہ کرہ کے تماس ہیں
اور $س ن = ن ر$

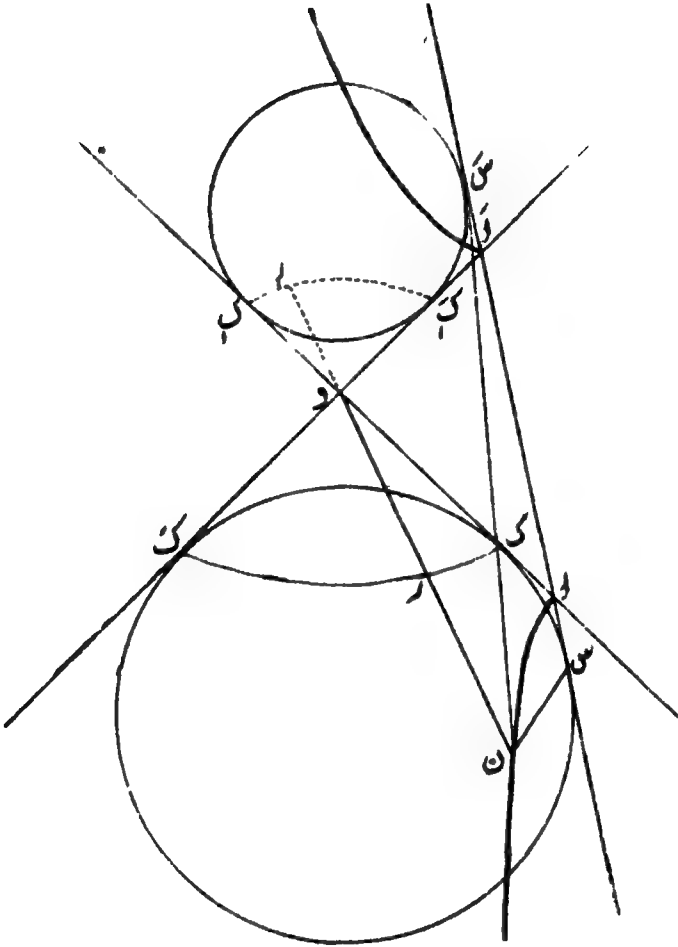
• $س ن + س ن = ن ر + ن ر = ر ر = ک ک$
اس سے معلوم ہوا کہ تراش کا منحنی قطع ناقص
ہے اس کے ماسکے س، س ہیں اور اس کا
محور اعظم ک ک ہے
[قطع ناقص مسئلہ ۸]

مسئلہ ۵

مخروط کی زائد تراش کا متقاطع محور ماسکی کروں
کے اس درمیانی فاصلے کے مساوی ہوتا ہے
جو مخروط کے ایک تولیدی خط پر ناپا جائے
فرض کرو کہ $ان ر$ تراش کا منحنی ہے
محوری سطح کو کاغذ کی سطح پر منطبق خیال کرو اور
فرض کرو کہ یہ کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط $ا ا$ پر
اور مخروط کو مولد خطوط ک ا، ک ا، ک ا پر ملتی
ہے

دو ماسکی کرے کھینچو جو مخروط کو دوائر ک رک
ک ا، ک ا پر اور کاٹنے والی سطح کو س اور س پر

مس کریں



منحنی AN کے کسی نقطہ N میں سے ایک
 مولد خط AN پر کھینچو جو ماسکی کروں کو R پر
 مس کرے

ن س ، ن س کو ملاؤ ، یہ بھی ماسکی کروں گے
مس کرینگے

تب س س = ن ر کیونکہ یہ کرہ کے تماس ہیں
اور س س = ن ر

س ن ~ س ن = ن ر - ن ر

= ر ر = ک ک

اس لئے معلوم ہوا کہ تراش کا منحنی قطع زائد ہے
جس کے ماسکے س اور س ہیں اور اس کا
مقاطع محور ک ک ہے (قطع زائد مسئلہ ۷)

مشقی مثالیں مسائل ۴ اور ۵

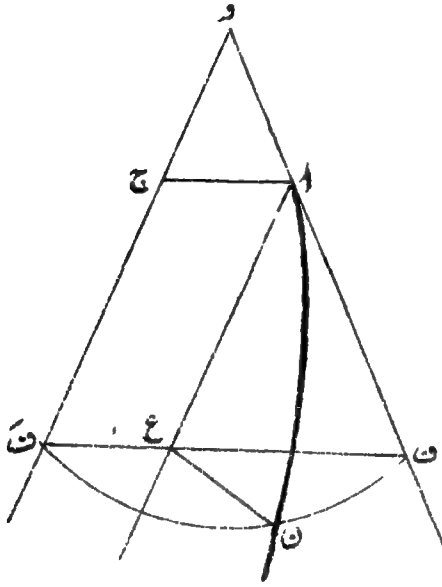
ثابت کرو کہ امدادی دائرہ اس کرہ کی سطح پر واقع ہے
جس کا قطر ماسکی کروں کے مرکوزوں کا خط وصل ہے۔

مسئلہ ۶

مخروط کی شلبی تراش کا وتر خاص مخروط اور شلبی
کے رؤس کے درمیانی فاصلے اور شلبی کے راس
میں سے گزرنے والی مدور تراش کے قطر کا تیسرا
متناسب ہوتا ہے

فرض کرو کہ ان تراش کا منحنی ہے
محوری سطح کو کاغذ کی سطح پر منطبق خیال کرو اور

فرض کرو کہ یہ کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط اے ج پر اور مخروط کو تولیدی خطوط و ا ف ، و ج ف پر ملتی ہے۔



منحنی پر کے کسی نقطہ ن میں سے ایک سطح
ف ن ف ا ع کھینچو جو مخروط کے محور پر عمود ہو
اور کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط ن ع پر، محوری
سطح کو مستقیم خط ف ع ف پر اور مخروط کو دائرہ
ن ن ف پر قطع کرے
ا ج کو ف ف کے متوازی کھینچو

چونکہ سطوح ف ن ف ا اور ا ن ع دونوں محوری
سطح پر عمود ہیں اس لئے ن ع محوری سطح پر عمود ہے

(اقلیدس م ۱۱ اش ۱۹) اس لئے ن ع ک ف اور
 ا ع دو نون پر عمود ہے۔
 وج ج ا کا تیسرا متناسب ۱۴ اس کو متساہ
 مثلثوں سے

$$\begin{aligned} ۱ ع : ۱ ع ف &= وج : ج ا \\ &= ج ا : ۱۴ اس \\ ۱۴ اس \times ۱ ع &= ع ف \times ج ا \\ ع ف \times ع ف &= ن ع^2 \end{aligned}$$

اس لئے منحنی ان شلجی ہے اور اس کا وتر خاص
 ۱۴ اس ہے (شلجی مسئلہ ۳)
 اور ۱۴ اس، وج اور ج ا کا تیسرا متناسب ہے

مسئلہ ۷

مخروط کی ناقص تراش کا محور اصغر مخروط کی ان
 مدور تراشوں کے اقطار کا وسط متناسب ہوتا ہے
 جو محور اعظم کے سروں میں سے گذرتی ہیں
 فرض کرو کہ تراش کا منحنی ان ا ہے
 محوری سطح کو کاغذ کی سطح پر منطبق خیال کرو اور
 فرض کرو کہ یہ کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط ا ا پر
 اور مخروط کو تولیدی خطوط د ا ج، د ا ج پر

مثابہ مثلثوں سے

$$ا ع : ع ف = ا ا : ا ج$$

$$اور ا ع : ع ف = ا ا : ا ج$$

$$ا ع \times ا ع : ع ف \times ع ف = ا ا : ا ج$$

$$ا ع \times ا ع : ن ع = ا ا : ا ج$$

[اقلیدس م ۳ ش ۳۵]

اس لئے تراش کا منحنی قطع ناقص ہے، اس کا محور اعظم ا ا ہے اور محور اصغر ا ج، ا ج کا وسط تناسب ہے (قطع ناقص مسئلہ ۳)

مسئلہ ۸

مخروط کی ہڈولی تراش کا مزدوج محور اس کی ان دو مدور تراشوں کے قطروں کا وسط تناسب ہوتا ہے جو قطع زائد کے راسوں میں سے گزیریں فرض کرو کہ تراش کے منحنی کی ایک شاخ ان ہے اور دوسری شاخ کا راس ا ہے

محوری سطح کو کاغذ کی سطح پر منطبق خیال کرو اور فرض کرو یہ کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط ا ا پر اور مخروط کو مولد خطوط سی و اف، ا و سی ف پر ملتی ہے

فرض کرو کہ ن کوئی نقطہ قطع زائد پر ہے ،
 ن ع معین ہے ، س اور س ماسکے ہیں ،
 ا اور ا راس ہیں ج مرکز ہے اور لا اس مرکز
 کا پائیں ہے جو ماسکے س کے مقابل ہے ۔
 فرض کرو کہ ون ، ون مؤلّد خط محوری
 سطح میں ہیں اور سطح ن ن ع محور پر عمود

ہے فرض کرو کہ ماسکی کرہ ون کو ک پر مس
 کرتا ہے

تب ک لا ، ف ون کے متوازی ہوگا [مسئلہ ۲]
 اور س ا ، اک کے مساوی ہے [اقلیدس ۳ ش ۲]
 فرض کرو کہ ون ع ایک سطح ہے جو کاٹنے والی
 سطح کے متوازی ہے اور جو مخروط کو مولّد خط ون پر
 محوری سطح کو وع پر اور سطح ن ن کو ن ع پر
 ملتی ہے مثلث وع ن ، لا ک متشابه ہیں
 کیونکہ وع ، لا کے متوازی ہے اور ع ن ، لا کے

$$\therefore \text{وع} : \text{ون} = \text{لا} : \text{اک}$$

$$= \text{لا} : \text{اس}$$

$$\therefore \text{ون} = \text{ر} \times \text{وع}$$

لیکن مؤلّد خط ون ، ون باہم مساوی ہیں

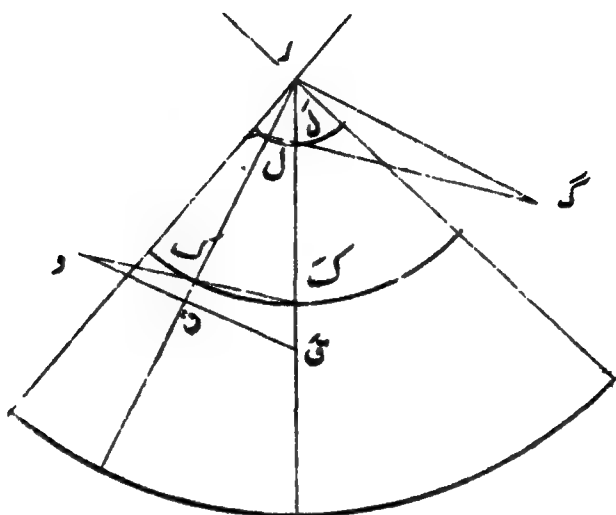
$$\begin{aligned} \text{ون} &= ر \times و ع \\ \text{قطع زائد کی شکل مسئلہ ۳ میں} \\ \text{ج ر} &= \text{ج ر} + \text{ر} \\ \text{ج ر} &= \text{ج ر} + \text{ج ب} \\ \text{ج س} &= \end{aligned}$$

ج ر = ج س = ر \times ج ر
اسلئے ن و ع متقاربوں کے درمیانی زاویہ کا نصف ہے (ہذلولی مسئلہ ۴) لیکن و ع متقاطع محور کے متوازی ہے اس لئے ون ایک متقارب کے متوازی ہے۔

مسئلہ ۱۰

اگر کسی نقطہ میں سے دو مستقیم خط دو ثابت مستقیم خطوں کے متوازی کھینچے جائیں اور وہ مخروط کو قطع کریں تو ان خطوط کے حصوں کی حاصل ضربوں کی نسبت اس نقطہ کے تمام مقامات کے لئے مستقل ہوگی۔

فرض کرو کہ وق ق، و ع ع دو خط ہیں جو نقطہ و میں سے دو ثابت مستقیم خطوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں اور مخروط کو اق ق، ع ع پر قطع کرتے ہیں



راس ر میں سے رگ ، رح کو ثابت مستقیم خطوں
کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ایک ثابت سطح
کو جو مخروط کے محور پر عمود ہے گ اور ح پر
ملتے ہیں

نوٹ دے غ اور رح کو شکل میں نہیں دکھایا گیا۔
سب سے پہلے سطح وق x وق پر غور کرو
فرض کرو کہ گ اور ح میں سے گزرنے والی ثابت
سطح ر ق ق کو مستقیم خط گ ل ل پر اور مخروط
کو دائرہ ل ل پر ملتی ہے۔

تیز فرض کرو کہ نقطہ و میں سے ایک سطح
گ ح کے متوازی کھینچی گئی ہے اور وہ سطح
ر ق ق کو وک ک پر اور مخروط کو دائرہ ک ک پر

ملتی ہے۔ مثلث وک ق، گ ل ر ایک ہی سطح میں واقع ہیں اور ان کے اضلاع متوازی ہیں

∴ وق : وک = گ ر : گ ل

اسی طرح سے وق : وک = گ ر : گ ل

∴ وق × وق : وک × وک = گ ر : گ ل

اب خواہ و کہیں واقع ہو گ ر مستقل ہے اور حاصل ضرب گ ل × گ ل بھی مستقل ہے [اقلیدس م ۳ ص ۳۲]

∴ وق × وق = لہ × وک × وک

اسی طرح سے وع × وع = مہ × دم × دم

جہاں لہ اور مہ مستقل مقداریں ہیں اور مہ، مہ وہ نقاط ہیں جہاں رع، رع دائرہ ک ک کو

قطع کرتے ہیں

∴ وک × وک = دم × دم [اقلیدس م ۳ ص ۳۶]

∴ وق × وق : وع × وع = لہ : مہ

چند مشہور مسائل جو طالب علم کو ثابت کرنے چاہئیں۔

قطع مکانی

- ۱۔ اگر ن و ن مکانی کا ایک وتر ہو جو محور کو و پر ملے اور ن ل، ن ل معین ہوں تو ثابت کرو کہ $ل \times ل = ل \times ل$ (دیکھو مسئلہ ۳)
- ۲۔ اگر اس مثلث کے گرد جو مکانی کے تین مماس کھینچے سے بنتا ہے ایک دائرہ بنایا جائے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ ماسک میں سے گزرے گا۔ (دیکھو مسئلہ ۱۳)
- ۳۔ اگر وق، وق دو مماس ہوں اور وص قطر ہو تو ثابت کرو کہ زاویہ ق وص زاویہ ق وص کے مساوی ہے۔ (دیکھو مسئلہ ۱۳)
- ۴۔ اگر ن اس قطر کا سرا ہو جو وتر ق ق کی تنصیف کرتا ہے اور ل ایک اور قطر کا سرا ہو جو ق ق کو م پر ملتا ہے تو ثابت کرو کہ $ق م \times م ق = م س \times س م$ (دیکھو مسئلہ ۱۶)

۵۔ اگر منحنی کے کسی نقطہ میں سے گزرنے والا قطر وتر ق ق کو نقطہ ل اور ماس ق م کو نقطہ ہ پر ملے تو ثابت کرو کہ

$$م د : د ل = ق ل : ل ق$$

(دیکھو مسائل ۱۶، ۱۷ اور ثبوت مسئلہ ۱۹)

۶۔ اگر و ن مکانی کون پر مس کرے اور وق د مکانی کو ق د پر ملے اور ن میں سے گزرنے والا قطر وتر ق د کو ی پر ملے تو ثابت کرو کہ۔

$$و ی = وق \times و د \quad \text{[دیکھو ۱۹]}$$

۷۔ اگر ایک دائرہ مکانی کو چار نقطوں ا، ب، ج، د پر ملے تو ثابت کرو کہ مشترک وتر ا، ب، ج، د محور سے مساوی زاوے بنائینگے۔ [دیکھو مسئلہ ۱۹]

۸۔ اگر ایک دائرہ مکانی کو چار نقطوں پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ان چار نقطوں کے معینوں کا مجموعہ صفر ہوگا [دیکھو مسئلہ ۱۵، ۱۹]

۹۔ اگر تین نقطوں ن، ق، د پر کے عماد ایک ہی نقطہ پر ملیں تو ن، ق، د کے معینوں کا مجموعہ صفر ہوگا اور

ثلث ن ق د کا دائرہ بیرونی (یعنی ن، ق، د میں سے گزرنے والا دائرہ) راس میں سے گزریگا۔ (بذریعہ ہندسہ تحلیلیہ)

۱۰۔ اگر وق، وق مکانی کے دو ماس ہوں تو وتر ق ق مکانی سے ایک ایسا حصہ کاٹیں گے جس کا رقبہ ثلث وق ق

کا $\frac{2}{3}$ ہوگا (دیکھو مسئلہ ۱۶)

مخروطی تراشیں

۱۔ مخروطی تراش کو کوئی خط دو نقطوں سے زیادہ میں نہیں مل سکتا [مسئلہ ۲]

۲۔ اگر ایک دائرہ مخروطی تراش کو چار نقطوں پر ملے تو ان میں سے کسی دو نقطوں کو ملانے والا خط محور سے وہی زاویہ بنائے گا جو باقی دو نقطوں کو ملانے والا خط بناتا ہے۔

[قطع ناقص مسئلہ ۳۴]

۳۔ ایک مخروطی تراش کا ماسکہ، مرتب، خسروج المکرزہ تینوں معلوم ہیں، معلوم کرو کہ ایک ایسا خط مستقیم جو محور کے متوازی ہو تراش کو کہاں ملیگا۔

[عمل۔ فرض کرو کہ خط مرتب کو m پر ملتا ہے، la کو مرکز اور rs کو نصف قطر مگر ایک دائرہ کھینچو۔ sm کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ دائرہ کو n پر ملتا ہے، sn کو بالترتیب lan کے متوازی کھینچو، lan نقاط مطلوبہ ہونگے۔]

۴۔ نصف وتر خاص کسی ماسکی وتر کے دو حصوں کے درمیان اوسط موسیقی ہوتا ہے۔

$$sn : sn = sn : sn = sn : sn$$

$$= ل-لا-س:لا-س:لا-ل$$

$$= س-ن-س:خ-س:خ-س-ن$$

۵۔ ایک ماسکی وتر کے حصوں کا حاصل ضرب ایسا بنتا ہے جیسے وتر کا طول۔

۶۔ کسی دو متقاطع وتروں کے حصوں کے حاصل ضرب (سطوح) اُن ماسکی وتروں کے طوولوں کے متناسب ہوتے ہیں جو ان کے متوازی ہوں [قطع ناقص ۳۴]

۷۔ قطع زائد یا قطع ناقص کے اُن ماسات کے نقاط تقاطع جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں ایک ثابت دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جسکو مرتب دائرہ کہتے ہیں۔ [قطع ناقص ۳۵]

۸۔ ثابت کر دو کہ

$$ن گ : ج د = ج ب : ج ا$$

$$اور \quad ن گ : ج د = ج ا : ج ب$$

(قطع ناقص ۱۸ اور ۲۳)

۹۔ ثابت کر دو کہ

$$س ن \times ب س ن = ج د = ن گ \times ن گ$$

(قطع ناقص ۱۳ اور ۱۸)

۱۰۔ اگر کوئی ماسکی وتر ق ق نصف قطر ج د کے متوازی ہو تو

$$ق ق \times ج ا = ج د$$

۱۱۔ اگر مخروطی تراش کا کوئی قطر مرتب کو مے پر ملے تو

مے س اُن سب وتروں پر عمود ہوگا جسکی قطر مذکور

تصفیف کرتا ہے۔

[قطع ناقص ۱۱ اور ۲۵]

۱۲۔ اگر وق ، وق ایک مخروطی تراش کے تماس ہوں اور ق ق مرتب کوک پر لے تو ثابت کرو کہ وسک زاویہ قائمہ ہے [قطع ناقص ۲۲]

۱۳۔ اگر ن پر کا تماس کسی دو مزدوج قطروں کو م اور م پر لے تو ثابت کرو کہ $ن م \times م ن = ج د$

[قطع ناقص ۲۸]

۱۴۔ ثابت کرو کہ عماد ن گ کا ظل ماسی فاصلہ م ن پر نصف وتر خاص کے مساوی ہوتا ہے۔ [قطع ناقص ۱۲]

۱۵۔ اگر وق ، وق قطع ناقص کے دو تماس ہوں اور ایک مستقیم خط نقطہ و میں سے گذرے اور منحنی کو نقاط ک اور م پر اور ق ق کو ل پر لے تو خط و ک ل م نسبت موسیقی میں تقسیم ہوگا یعنی۔

$$\frac{و ل}{و ک} = \frac{و ک}{و م} \quad (\text{تظلیل})$$

۱۶۔ اگر کسی تراش مخروطی کے نصف قطر جن ، جن ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ج ن}{ج ن} + \frac{ج ن}{ج ن} \quad \text{ایک مقدار مستقل ہے (مرتب دائرہ قطع ناقص ۳۳)}$$

۱۷۔ اگر ایک مستقیم خط ایک اور مستقیم خط کے قطب میں سے

گزرے تو ثابت کرو کہ دوسرا مستقیم خط پہلے خط کے قطب میں سے گزرتا ہے (تظیل)

اسطوانہ اور مخروط کی تراشیں

۱۔ ثابت کرو کہ مستوی تراش کے کسی نقطہ پر کا ماس ماسکی فاصلوں اور نیز تولیدی خط سے مساوی زاوئے بناتا ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ تراش کے محور اصغر کا نصف ماسکی کروں کے نصف قطروں کے درمیان وسط تناسب ہوتا ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ مخروط کی تمام تراشوں کیلئے وتر خاص ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو راس مخروط سے کاٹنے والی سطح پر نکالا جائے۔

۴۔ ثابت کرو کہ ایک قائم مستدیر اسطوانہ سے ایک ایسا قطع ناقص کاٹا جاسکتا ہے جس کی خروج مرکز نسبت کچھ ہی ہو اور پھر قائم الزاویہ تظیل سے اس قطع ناقص کا ظل دائرہ ہو سکتا ہے۔

{ دیکھو ضمیمہ }



عملیات شلبجی

۱۔ ق س ق شلبجی کا ایک ماسکی وتر ہے جو ن پر کے ماس کے متوازی کھینچا گیا ہے، 'ن گ' عماد ہے، ثابت کرو کہ
 $ق س \times س ق = ن گ$

۲۔ دو شلبجی خطوط کا ایک مشترک ماسکہ ہے اور ان کے محوروں کی سمت ایک ہی ہے، ماسکہ میں سے ایک مستقیم خط کھینچا گیا ہے جو انکو چار نقطوں پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ اگر ان نقطوں پر ماس کھینچے جائیں تو ان کے تقاطع سے ایک مستطیل شکل پیدا ہوگی جس کا ایک قطر ماسکہ میں سے گزرے گا

۳۔ ایک شلبجی کا مرتب اور منحنی پر کے دو نقاط معلوم ہیں ماسکہ دریافت کرو، نیز نقاط معلومہ کو جو خط وصل کرتا ہے اسکے متوازی منحنی کا ایک ماس کھینچو۔

۴۔ ن ل ق شلبجی کا دگنا معین ہے اور ان ق مثلث متساوی الاضلاع ہے، ثابت کرو کہ $ل = د$ وتر خاص کا تین گنا

۵۔ ثابت کرو کہ شلبجی کے کسی دو ماسات کا خارجی زاویہ

اس زاویہ کا نصف ہوتا ہے جو وتر تماس کے محاذی
ماسک پر بنے۔

۶۔ وقی، وقی شلجی کے تماس ہیں، وتر وقی محور
کو نقطہ دہر ملتا ہے، محور پر عمود ول نکالا گیا ہے

ثابت کرو کہ $ال = اور$
۷۔ اگر شلجی کے کسی عماد ن گ کو اس طرح تقسیم کیا جائے
کہ $ن ق : ق گ$ ایک مستقل نسبت ہو تو ثابت
کرو کہ قی کا طریق شلجی ہے

۸۔ دو شلجی خطوط کا مرتب ایک ہی ہے، ثابت کرو کہ
انکے مشترک تماس ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ
بناتے ہیں۔

۹۔ شلجی کا مرتب معلوم ہے، نیز منحنی کے دو تماس
دئے ہوئے ہیں، شلجی کا ماسک اور مماسات کے نقاط
تماس دریافت کرو۔

۱۰۔ شلجی کا ایک قطر ایک وتر کی تنصیف کرتا ہے، اگر
وتر اس خط کا چار گنا ہو جو وتر کے نقطہ وسطی اور قطر کے
سرے کو ملاتا ہے تو ثابت کرو کہ وتر ماسک میں سے گزرتا
ہے۔

۱۱۔ اگر شلجی کے تماس $ون$ ، $ون$ ، $ا$ پر کے تماس
کو $ما$ اور $مس$ پر ملیں اور $ن$ $ن$ محور کو $ک$ پر
قطع کرے تو ثابت کرو کہ $ک$ $ما$ $ک$ $ما$ مماسات

دن، ون کے متوازی ہیں [یہ مسئلہ کسی ایک قطر اور اسکے سرے پر کے ماس کے لئے درست ہے ضروری نہیں کہ قطر کی بجائے

محور ہو]

۱۲۔ اگر شلجمی کے کسی نقطہ ن پر کا ماس ن ما راس پر کے ماس کو ما پر لے اور ن ما کے قطر پر ایک دائرہ کھینچا جائے جو محور کو ک اور ک پر لے تو ثابت کرو کہ ن ک، ان ک مدودہ معنی کے عماد ہیں۔

۱۳۔ شلجمی کے وتروں اب، ج د کو خارج کیا گیا ہے اور وہ ایک دوسرے کو نقطہ و پر ملتے ہیں، اب، ج د پر نقطے ع اور ف ایسے ہیں کہ $وع = وا \times وب$ ، $وف = و ج \times ود$ ثابت کرو کہ ع ف محور کے متوازی ہے۔

۱۴۔ اگر ایک شلجمی ایک مثلث کے تین ضلعوں کو مس کرے تو اس کا مرتب مثلث کے مرکز عمودی میں سے گزرے گا۔

۱۵۔ اگر ایک دائرہ پر کے چار نقطے معلوم ہوں اور دو شلجمی خطوط ان میں سے گزریں تو ثابت کرو کہ ان کے محور ایک دوسرے کو نقطوں کے مرکز ہندی پر قطع کریں گے۔

۱۶۔ ق وق، رور شلجمی کے دو وتر ہیں رور کو دونوں طرف اتنا خارج کیا گیا ہے کہ یہ ق، ق پر کے

ماسات کو r ، r پر ملتا ہے، اگر $r = r$ = ثابت کرو کہ
ور = ور

ملیاجی

۱۷۔ ن وق ایک زاویہ حادہ ہے جس کے اضلاع، ملیاجی کے ماسکی وترن ق کے سروں پر ماس ہیں، دونوں ماس کے دریافت کرو۔

۱۸۔ ایک ذواربۃ الاضلاع ایک تراش محروطی کے گرد بنی ہوئی ہے اور شکل کے قطر ایک دوسرے کو ماس کے پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔

۱۹۔ معلوم کرو کہ قطع ناقص کے دو ایسے مزدوج قطر کس طرح کھینچے جائیں جو ایک دوسرے سے ایک زاویہ معلومہ بنائیں۔

۲۰۔ قطع ناقص اور اس کے امدادی دائرہ پر کے نظیری نقاط ن اور ق ہیں، اس قطع ناقص کا ماس کہ ہے، ثابت کرو کہ $س ن = اُس عمود$ کے جو $س$ سے ق پر کے ماس (دائرہ) پر نکالا جائے۔

۲۱۔ ایک قطع ناقص میں ن پر کا عماد محور اصغر کو گم پر ملتا ہے، نقطہ ن سے اسی محور پر مین ن ل کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ

ج گ : ج ل = ج س : ج ب

۲۲۔ ایک مخروطی تراش کا ماسک س ہے اور محور کے ثابت نقطہ سے سخنی کے نقطہ ن پر کے ماس پر عمود نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس عمود اور س ن کا نقطہ تقاطع ایک ثابت دائرہ پر واقع ہے۔

۲۳۔ ایک دائرے ہوئے نقطہ سے عماد کھینچو۔

(۱) قطع مکانی کے محور پر (۲) قطع ناقص کے محور اعظم پر ۲۴۔ دو قطع ناقص خطوط کا مشترک ماسک س ہے، ان کے ایک مشترک ماس کے کسی نقطہ ن سے قطع ناقص خطوں کے ماس کھینچے گئے ہیں جو ایک دوسرے مشترک ماس کو قیام پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ زاویہ قیاس مستقل ہے۔

۲۵۔ تراش مخروطی کی ایک قوس دی ہوئی ہے، یہ کس طرح معلوم کیا جائے کہ اس کی شکل مکانی ہے یا قطع ناقص یا قطع زائد۔

۲۶۔ ایک قطع ناقص کے دو ماس معلوم ہیں اور ایک ماسک دیا ہوا ہے، مرکز کا طریق دریافت کرو

۲۷۔ ایک تراش مخروطی کا ماس کھینچا گیا ہے اور وہ مرتبات کولم پر ملتا ہے، اگر س، س ماسکے ہوں اور ل س اور م س نقطہ ن پر ملیں تو ثابت کرو کہ

ل ن = م ن

۲۸۔ ن ق ایک تراش مخروطی کا دگنا معین ہے اور جو مستقیم خط ن کو مرتب کے پائین سے ملاتا ہے وہ منحنی کو ر پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ ق ر ماسک میں سے گزرتا،

۲۹۔ قطع ناقص کے دو وتروں ان، ب ق کو خارج کیا گیا ہے اور وہ ایک دوسرے کو وپر ملتے ہیں، ان کے متوازی دو اور وتر ق ج، ن د کھینچے گئے ہیں جو ایک دوسرے کو ر پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ مثلث لاوب، ج ر د متشابہ ہیں اور لا ب، ج د کے متوازی ہے۔

۳۰۔ اگر دو مخروطی تراشوں کا ایک مشترک ماسک ہو اور وہ اس طرح واقع ہوں کہ صرف دو نقطوں پر ایک دوسرے کو قطع کریں تو اس کا مشترک وتر ان کے متعلقہ مرتبات کے نقطہ تقاطع میں سے گزرے گا

۳۱۔ متوازی الاضلاع شکلوں کا ایک نظام ایک ہلیجی کے اندر بنایا گیا ہے، ان شکلوں کے اضلاع مساوی مزدوج قطروں کے متوازی ہیں، ثابت کرو کہ ان کے اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے

۳۲۔ ثابت کرو کہ ذیل کے عمل سے کسی مخروطی تراش کا عا د کھینچ سکتا ہے۔ معین ن ل کھینچو، محور پر ل ک، ل م، میں سے ہر ایک کو ل ن کے مساوی کاٹو،

ن ک، ن م کو اتنا خارج کرو کہ وہ منحنی کو دوبارہ ق، ق پر ملیں، ق ق کی تنصیف ص پر کرو۔ تب

ن ص ' ن پر کا عماد ہوگا

۳۳۔ ایک ذواربۃ الاضلاع Δ ب ج د کے اندر ایک قطع ناقص بنایا گیا ہے، اس کا ماسکہ ہے، ثابت کرو کہ زاوے Δ س ب اور ج س د ملکر زوایا ب س ج اور د س Δ کے برابر ہیں۔

۳۴۔ اگر ماسکون سے قطع ناقص کے کسی نقطہ پر کے عماد پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کی باہمی نسبت وہی ہوگی جو ان عمودوں کی ہے جو ماسکوں سے اُسی نقطہ پر کے ماس پر نکالے جائیں

۳۵۔ ایک مخروطی تراش کے دو ماس وئے ہوئے ہیں اور اس کا مرکز بھی معلوم ہے ثابت کرو کہ اس کے ماسکوں کا طریق قائم بذولی ہے

۳۶۔ ہیلیجی کے نقطہ ن کا معین ن ل ہے، اس کو اتنا خارج کیا گیا ہے کہ یہ وتر خاص کے ایک سرے پر کے

ماس کو ق پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ $ق ل = س ن$

۳۷۔ ایک قائم مخروط کی ہیلیجی تراش کا ظل ایک ایسے سطح مستوی پر اتارا گیا ہے جو محور مخروط پر عمود ہے، ثابت کرو کہ تقطیل کے منحنی کا ماسکہ وہ نقطہ ہے جہاں مخروط کا محور سطح تقطیل کو ملتا ہے۔

۳۸۔ قطع ناقص کے امدادی دائرہ پر ایک نقطہ ہے، اس نقطہ سے قطع ناقص کے دو ماس و ن، و ق

کھینچے گئے ہیں، 'ن ج ن' قطع ناقص کا ایک قطر ہے،
ثابت کرو کہ 'ق ق' ماسکہ میں سے گزرتا ہے۔
۳۹۔ اگر کسی تراش مخروطی میں 'ن ق' ایسے
وتر ہوں جو محور سے مساوی زاوے بنائیں تو ثابت کرو
کہ 'ن ق ق' کا بیرونی دائرہ (گرد بنا ہوا دائرہ) تراش کو
نقطہ 'ن' پر مس کرتا ہے۔

۴۰۔ اگر ایک ایلچی میں دو ایسی اشکال ذواربۃ الاصناع
بنائی جائیں جن میں سے ایک کے تین ضلعے دوسری
کے تین ضلعوں کے متوازی ہوں تو ان کے چوکے
ضلع بھی متوازی ہونگے۔ اسلئے معلوم کرو کہ متوازی
رولر (پٹری) کے ذریعہ قطع ناقص کے کسی نقطہ پر ماس
کس طرح کھینچ سکتا ہے [تفیل]

۴۱۔ اگر 'ن' قطع ناقص کے نقطہ 'ن' پر ماس ہے اور
س 'ن' ایک مستقل زاویہ ہے ثابت کرو کہ 'ر' کا طریق
ایک دائرہ ہے۔

۴۲۔ قطع ناقص کے نقاط 'ق'، 'ق' پر ماس 'وق'، 'وق'
کھینچے گئے ہیں نیز 'ق'، 'ق' گ' عماد ہیں جو محور عظم
کو نقاط 'گ'، 'گ' پر ملتے ہیں،
ثابت کرو کہ خلیں 'وق'، 'وق' گ' متشابہ ہیں

۴۳۔ ماسات 'وق'، 'وق' کے محاذی اُس معین کے
پائین پر مساوی زاوے بنتے ہیں جو 'و' میں سے گزرتا ہے۔

۴۴۔ ایک قطع ناقص ایک مثلث کے اضلاع کو ان کے وسطی نقاط پر مس کرتا ہے، ثابت کرو کہ قطع ناقص کا مرکز مثلث کا مرکز ثقل ہے [تفصیل]

مکانی

۴۵۔ مکانی کے ایک عماس پر راس اور ماسک سے عمود اور، س مآ نکالے گئے ہیں ثابت کرو کہ

$$س مآ = س مآ \times اور + س ل$$

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۴ء]

۴۶۔ مکانی پر ایک نقطہ ن ہے، لون پر عمود س ر نکالا گیا ہے اور یہ راس پر کے عماس کو

پر ملتا ہے

ثابت کرو کہ اور، ن ل کا لچ ہے جہاں ن ل نقطہ ن سے محور پر عمود نکالا گیا ہے

[کلیئر کالج ۱۸۸۸ء]

۴۷۔ ایک مکانی ایک مثلث متساوی الاضلاع کے ضلعوں کو نقاط ا، ب، ج پر مس کرتا ہے اور یہ نقاط بالترتیب ا، ب، ج کے مقابل کے اضلاع پر واقع ہیں، ثابت کرو کہ ا، ب، ج ج ج مکانی کے ماسک پر ملتے ہیں

[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۶ء]

۴۸۔ ایک شلجی ایک اور مساوی شلجی کے گرد پھرتا ہے، ابتدا میں دونوں کے راس ایک دوسرے پر منطبق تھے، پھر ایک کروکہ متحرک شلجی کے راس پر کا تماس ہمیشہ ایک ثابت دائرہ کو مس کرتا ہے

[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۶ء]

۴۹۔ مکانی پر دو نقاط N ، Q ہیں، ان کو مرکز مان کر ایسے دائرے کھینچے گئے ہیں جو ماسکہ میں سے گذرتے ہیں اور ایک دوسرے کو S اور L پر علی القواہم کاٹتے ہیں، اگر Q اور ان دائروں کے نقاط تقاطع کو ملائے والے خطوط مرتب کو M اور M' پر کاٹیں تو ثابت کرو کہ زاویہ M N M' زاویہ R N S کا نصف ہے

[پمبروک کالج ۱۸۸۶ء]

۵۰۔ ایک مکانی میں زاویہ AS N چار تہائی قائمہ کے برابر ہے، ثابت کرو کہ N پر کا معین اور وتر خاص کے ایک سرے پر کا عماد ایک دوسرے کو محور پر قطع کرتے ہیں

[ماڈلن کالج ۱۸۸۸ء]

۵۱۔ مکانی کے دو تماسوں کے مقام معلوم ہیں اور ان کے نقاط تماس بھی دے ہوئے ہیں، منحنی کا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو

[کوین کالج ۱۸۸۸ء]

۵۲۔ ایک شلجی کے نقاط ن، ق پر ماس
ون، وق کھینچے گئے ہیں، س ماسکے ہے،
اگر وس، ون ق میں سے گزینوالے دائرہ کو
دو بارہ م پر لے تو ثابت کرو کہ س، وم کی
تصنیف کرتا ہے

[کوین کالج ۱۸۸۸ء]

۵۳۔ نقطہ ن پر کا عماد ن گ ہے، اگر مکانی
کے ایک نقطہ سے ایک ایسے دائرہ کا ماس کھینچا
جائے جس کا مرکز گ اور نصف قطر گ ن ہو
تو ثابت کرو کہ یہ ماس اُس عمود کے برابر ہوگا جو اسی
نقطہ سے ن کے معین پر نکالا جائے

[جیسس کالج ۱۸۸۸ء]

۵۴۔ مثلث ا ب ج کے خارجی زاویہ د کے نصف پر ایک
ثابت نقطہ ث ہے، ث د کو وتر مان کر ایک
دائرہ کھینچا گیا ہے جو ا ب، ا ج کو ن اور ق
پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ ن ق ایک ایسے شلجی
کو لف کرتا ہے جس کا ماسکے ث ہے اور جس کے
راس پر کا ماس اُن عمودوں کے پائیں کو ملانے
والا مستقیم خط ہے جو نقطہ ث سے ا ب اور ا ج
پر نکالنے جائیں

[جیسس کالج ۱۸۸۸ء]

۵۵۔ شلجی کے راس پر تماس کھینچا گیا ہے اور اس پر دو نقطے مآ اور مآ ایسے لئے گئے ہیں کہ مس مآ و مآ ایک مستقل مقدار ہے، شلجی کے باقی دو تماس جو مآ اور مآ میں سے گزرتے ہیں وہ نقطہ ق پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے

[جون کالج ۱۸۸۸ء]

۵۶۔ ایک دائرہ ایک شلجی کو نقطہ ن پر مس کرتا ہے اور ماسکہ س میں سے گزرتا ہے اگر شلجی کا راس ل ہو اور دائرہ محور کو دو بارہ ک پر سکائے تو ثابت کرو کہ ل ک، ن کے فصلہ کا مین گنا ہے

[سلون کالج ۱۸۸۸ء]

۵۷۔ شلجی کے ایک تماس پر دو نقطے ن، ق لئے گئے ہیں جن کے فاصلے شلجی کے ماسکہ سے مساوی ہیں، ثابت کرو کہ ن اور ق میں سے گزرنے والے باقی دو تماس ایک دوسرے کو محور پر ملینگے۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۶ء]

۵۸۔ شلجی پر تین نقطے ن، ق، ر ہیں، وتر ن ر نقطہ ق میں سے گزرنے والے قطر کو

س پر ملتا ہے، وتر ن ق، ر میں سے گزرنیوالے قطر کو ط پر ملتا ہے ثابت کرو کہ س ط، ن پر کے تماس کے متوازی ہے

[کلیئر ۱۸۸۶ء]

۵۹۔ ایک شلجی کا راس ۱، ماسکہ س، اور نصف وتر خاص س خ ہے ۱ پر کا تماس خ میں سے گزرنیوالے قطر کو نقطہ و پر قطع کرتا ہے، نقطہ و میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جس پر دو نقطے ن اور ق لئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ن میں سے گزرنے والے تماسات کا وتر تماس ق میں سے گزرنے والے تماسات کے وتر تماس کو زاویہ واس کے منصف پر قطع کرتا ہے

[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۶ء]

۶۰۔ ایک شلجی کا راس ۱ اور ماسکہ س ہے، شلجی کے محور پر ایک بیرونی نقطہ ن لیا گیا ہے، اگر ن س کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے اور ۱ پر کا تماس اس دائرہ کو ق اور ر پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ن ق اور ن ر شلجی کو مس کرتے ہیں نیز ثابت کرو کہ اگر کوئی تماس دائرہ کو ق،

ر پر کاٹے تو شلجی کے باقی ماسات جوق ، ر سے کھینچ سکتے ہیں وہ ایک دوسرے کو محیط دائرہ پر قطع کرینگے

[ٹرنٹی کالج سنہ ۱۸۸۶ء]

۶۱۔ ایک نقطہ اس طح حرکت کرتا ہے کہ ایک نقطہ معینہ اور ایک ثابت مستقیم خط سے اسکے فاصلو کا مجموعہ ہمیشہ مستقل رہتا ہے ثابت کرو کہ یہ ایک شلجی مرتسم کرتا ہے ، اس شلجی کے وتر خاص کا طول دریافت کرو

[کون کالج سنہ ۱۸۸۶ء]

۶۲۔ ایک شلجی چار ایسے نقطوں ا، ب، ج، د میں سے گزرتا ہے کہ ا، ب، ج، د کے متوازی ہے ، شلجی کے محور دریافت کرنے کا ہندسی عمل دریافت کرو۔

[میس کالج سنہ ۱۸۸۶ء]

۶۳۔ ا اور ن دو ثابت نقطے ہیں ، کئی ایک شلجی خط کھینچے گئے ہیں جو ن میں سے گزرتے ہیں اور جن سب کا راس ا ہے ، ثابت کرو کہ ن پر کے ماس کے ا پر کے ماس اور عماد کے

ساتھ تقاطع کے نقاط دو ثابت دائروں پر واقع ہیں اور ان دائروں میں سے ایک دائرہ دوسرے کا وگنا ہے [جون ۱۸۸۶ء]

۶۴۔ اگر شلجی کے کسی نقطہ ن سے محور اور راس پر کے ماس پر عمود ن ل، ن م کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ م ل ہمیشہ ایک شلجی کو مس کرتا ہے۔

[پتیر ہوس ۱۸۸۶ء]

۶۵۔ ایک شلجی کا متغیر ماس دو ثابت ماسوں کو نقاط ط اور ط پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ نسبت س ط : س ط مستقل ہے۔

[ٹرینٹی کالج ۱۸۸۶ء]

۶۶۔ اگر شلجی کے ایک قطر ن ص پر عمود ق د نکالا جائے تو ثابت کرو کہ ق د : ق ص = ۱ : س ن

[ٹرینٹی کالج ۱۸۸۶ء]

۶۷۔ ایک شلجی کے ماس س سے ن پر کے ماس پر ایک عمود س م کھینچا گیا ہے، اس عمود کے پائیں م میں سے ماک محور کے متوازی کھینچا گیا ہے جو عماد ن گ کو ک پر ملتا ہے س ک کو ملایا گیا ہے، ثابت کرو کہ مثلثات س ک گ اور س س گ ن میں سے ہر ایک

مثلت س ن صا کے برابر ہے۔

[ٹرنٹی ہوس ۱۸۸۶]

۶۸۔ و ایک ثابت نقطہ ہے اور م م م ایک ثابت خط ہے جو و میں سے نہیں گزرتا، خط م م پر کوئی نقطہ ق لیا گیا ہے، اگر وق کی اس جانب میں جس طرف م م واقع نہیں ہوتا ایک ایسا مثلث متساوی الساقین ون ق بنایا جائے جس کا راسی زاویہ ون ق اس زاویہ حادہ کا دو چند ہو جو وق، م م سے بناتا ہے تو ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک شلجی ہے۔

[ٹرنٹی ہوس ۱۸۸۶]

۶۹۔ ایک شلجی کے اندر ایک مثلث اب ج بنایا گیا ہے اگر اس مثلث کے ضلعون کے متوازی ماس کھینچنے سے ایک اور مثلث بنایا جائے تو ثابت کرو کہ مثلث اب ج کے اضلاع طول میں ماسی مثلث کے اضلاع کے چار گئے ہیں [آئی سی ایس ۱۸۸۶]

۷۰۔ ایک شلجی کے نقاط ن، ن، ن پر ماس کھینچے گئے ہیں اور وہ ایک دوسرے کو ن پر قطع کرتے ہیں، شلجی کا راس ل ہے اور محور ل ل، ل اور ن، ن، ن پر کے

میعون کے پائیں ل، ل، ل، ل ہیں ثابت کرو کہ

$$ن : ن = ل : ل = ا : ا = ا : ا$$

[آئی سی ایس ۱۸۸۶]

۷۱۔ وق، وق شلجی کے ماس ہیں اور وص قطر ہے اگر وص مرتب کوک پر ملے اور ق ق محو کو ل پر کاٹے تو ثابت کرو کہ وک = س ل جہاں س ماسک ہے

[آئی سی ایس ۱۸۸۶]

۷۲۔ اگر ایک ماسکی وتر ن س ق کے سروں پر کے ماس ایک دوسرے کو د پر قطع کریں تو س د، اس اور ن ق کا وسط تناسب ہوگا۔

[آئی سی ایس ۱۸۸۳]

۷۳۔ ایک دے ہوئے دائرہ کے ایک قطعہ کے اندر جو دائرے بن سکیں ان کے مرکزوں کا طریق دریافت کرو۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۷]

۷۴۔ ایک شلجی کے ماسک س میں سے تین وتر ن س ن، ق س ق، ر س ر گزرتے ہیں، ثابت کرو کہ مثلثوں ن ق ر اور ن ق ر کے رقبوں کو آپس میں وہی نسبت ہے جو ن،

ق، ر اور ن، ق، ر کے معینوں کے حاصل ضربوں کو آپس میں ہے [پٹر ہو س ۱۸۸۴ء]

۷۵۔ دو مستقیم خط دئے ہوئے ہیں اور شلجی خطوط کا ایک سلسلہ ان خطوط کو مس کرتا ہے اور اس سلسلہ کا ہر ایک شلجی ان میں سے ایک خط کو ہمیشہ ایک نقطہ معینہ پر مس کرتا ہے ثابت کرو کہ ان شلجی خطوط کے واسطے ایک ثابت دائرہ کے محیط پر واقع ہیں اور انکے مرتبات ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں

۷۶۔ دو مساوی شلجی ہیں ان کا محور مشترک ہے اور انکے قعر متقابل سمتوں میں پھیر دئے گئے ہیں، اگر ایک شلجی کے ایسے وتر نکھینچ جائیں جو دوسرے شلجی کے تماس ہوں تو ثابت کرو کہ ان وتروں کے نقطہ تنصیف کا طریق ایک ایسا شلجی ہے جسکے خطی البعاد دئے ہوئے شلجی خطوط کے البعاد کے ثلث ہیں

[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۴ء]

۷۷۔ ن پر کا عماد راس پر کے تماس کو ف پر اور منحنی کو دوبارہ ف پر ملتا ہے، اگر شلجی کا محور ن پر کے تماس اور عماد کو بالترتیب ط اور گ پر ملے تو ثابت کرو کہ $n \times n = f = g$

[ٹرنٹی ہو س ۱۸۸۸ء]

۷۸۔ شلجی کے ایک نقطہ ن پر کا عماد منحنی کو دوبارہ

ق پر ملتا ہے، وتر ن ق کا قطب ط ہے اور جو خط ط کو ماسکے س سے ملاتا ہے وہ اس خط کو جو ن میں سے س ن پر عمود کھینچنے سے پیدا ہوا ہو و پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ

$$ط س = س و \text{ اور زاویہ } ط و ق \text{ قائمہ ہے}$$

[جون ۱۸۸۶ء]

۷۹۔ ایک شلجی کے ماسکی وتر ق ق کا نقطہ تنصیف ص ہے اور ق، ق پر کے ماس ط پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ط ق ق کے بیرونی دائرہ اور خط ط ص کے نقطہ تقاطع کا طریق شلجی ہے۔

[پیتھر ہوس ۱۸۸۸ء]

۸۰۔ شلجی کے کسی نقطہ ن سے دو وتر کھینچے گئے ہیں جو منحنی کے نقاط ن، ن پر عادی ہیں ثابت کرو کہ وتر ن ن، ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

[کلیئر ۱۸۸۷ء]

۸۱۔ دو مساوی شلجی وضعاً اور شکلاً متشابہ ہیں اور انکا محور ایک ہی ہے، ایک شلجی کا ایک ماس کھینچا گیا ہے جو دوسرے شلجی کو ن اور ق پر ملتا ہے ثابت کرو کہ ق کا عمودی فاصلہ اس قطر سے جو ن میں سے گذرتا ہے مستقل ہے اور شلجی کے اس حصے کا رقبہ جو وتر ن ق کھینچنے سے کٹتا ہے مستقل ہے [پیرک کالج ۱۸۸۶ء]

۸۲۔ شلجی پر ایک ایسا نقطہ دریافت کرو جس پر کا
عماد ایک دئے ہوئے مستقیم خط کے برابر ہو
[ٹرنٹی ہال ۱۸۸۷ء]

۸۳۔ شلجی کے تین تماس کھینچنے سے جو مثلث بنتا ہے
وہ متساوی الساقین ہے، ثابت کرو کہ جو خط مساوی
اضلاع کے نقطہ تقاطع کو ماسکہ سے ملاتا ہے وہ
مقابل کے ضلع کے نقطہ تماس میں سے گذرتا ہے
[یکتھرین کالج ۱۸۸۷ء]

۸۴۔ دو شلجی خطوط جن کا ماسکہ مشترک ہے ایک دوسرے
کو زاویہ قائمہ پر کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ انکے راسوں کا
خط وصل ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور ان کے نقطہ
تقاطع کے ماسکی نیم قطر کے برابر ہے

[جون ۱۸۸۷ء]

۸۵۔ اگر ن ل شلجی کا کوئی معین ہو اور ق ل ق
کوئی وتر ہو جو ل میں سے گذرے اور شلجی کو ق
اور ق پر کاٹے تو ثابت کرو کہ ق اور ق کے
معینوں کی حاصل ضرب ن ل کے مربع کے برابر
ہوگی۔

[سلون ۱۸۸۷ء]

۸۶۔ دو ثابت مستقیم خط ایک دوسرے کو ۱ پر قطع
کرتے ہیں اور ب ایک ثابت نقطہ ہے، اگر

ایک ایسا دائرہ کھینچا جائے جو l اور b میں سے گزرے اور ان خطوں کو $ج$ اور $د$ پر کاٹے تو ثابت کرو کہ $ج د$ ہمیشہ ایک شلجی کو مس کرتا ہے [کلیر کالج ۱۸۸۵ء]

۸۷۔ شلجی کے اس نقطہ پر جس کا معین اسکے فاصلہ کے برابر ہے عمادی وتر کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ اسکے عمادی ماسکہ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے [پتر ہوس ۱۸۸۵ء]

۸۸۔ ایک دائرہ شلجی کے ماسکہ میں سے گزرتا ہے، یہ منحنی کو $ن$ پر مس کرتا ہے اور علاوہ اسکے $ل$ اور $م$ پر کاٹتا ہے اگر یہ محور کو $ع$ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ $ل ن$ ، $م ع$ کے مساوی ہے۔ [کلیر کالج ۱۸۸۶ء]

۸۹۔ اگر ایک شلجی کا محور ایک دے ہوئے خط کے متوازی ہو اور شلجی دو نقاط معلومہ میں سے گزرے او ایک ایسے خط کو مس کرے جو (ان دو نقاط معلومہ میں سے) ایک نقطہ سے گزرتا ہو تو شلجی کے مرتب کا مقام ہندی عمل سے دریافت کرو [کلیر کالج ۱۸۸۶ء]

۹۰۔ شلجی کے مماسات $ط ن$ ، $ط ق$ کے عمادی ماسکہ پر جو زاوے بنتے ہیں وہ $ط$ کے سب مقامات کے لئے مستقل ہیں، ثابت کرو کہ اگر مثلثات $س ن ط$ ، $س ط ق$ کے گرد دائرے بنائے جائیں تو ان کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ ایسے بدلیگا جیسے $س ط$ [کلیر کالج ۱۸۸۶ء]

۹۱۔ ایک شلجی کا ماسکی وتر n قی ہے اور q قی میں سے گزرنے والے قطر پر کوئی نقطہ r ہے، ثابت کرو کہ اُس ماسکی وتر کا طول جو n کے متوازی ہے = $\frac{n}{n+q}$ [ٹرنٹی کالج ۱۸۸۵ء]

۹۲۔ ایک مثلث abc کے ضلعوں پر نقاط d, e, f لئے گئے ہیں اور تین ہم ماسک شلجی کھینچے گئے ہیں جن میں سے ایک b, f, e ، ایک c, f, d ، ایک a, d, e کو مس کرتا ہے اور باقی دو شلجی خطوط کے متماثل ثلاثیوں کو، مشترک ماسک s سے اور مرتبات ایک دوسرے کو g, h, i پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ مثلثات dsg, esh, fsi بالترتیب $s, d, e, s, e, s, f, s, f$ کے مربعوں کے متناسب ہیں۔

[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۵ء]

۹۳۔ دو ہم ماسک شلجی ہیں ان کے ایک نقطہ بیرونی p سے ایک شلجی کے ماس pn ، pt اور دوسرے شلجی کے pr, ps کھینچے گئے ہیں، اگر زاویوں npq, rps کا مجموعہ 180° ہو تو ثابت کرو کہ nr, qs یا تو متوازی ہیں یا ماسک پر ملتے ہیں اگر وہ متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ وہ شلجی خطوط کے مشترک ماسوں کے بھی متوازی ہیں۔ [پیرک کالج ۱۸۸۵ء]

۹۳۔ دو ثابت نقطوں ۱ اور ۲ سے ایک متغیر خط پر عمود ۱ ن ' ب ق نکالے گئے ہیں ، اگر دو اربعہ الاصلاع ۱ ب ق ن کا رقبہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ متغیر خط کا لغات شلجی ہے ۔

[کینز کالج ۱۸۸۵ء]

۹۵۔ شلجی کے وتر خاص کے ایک سرے خ پر کا عماد مخنی کو دوبارہ ن پر ملتا ہے ، ن پر کا ماس ' ممدودہ وتر خاص کو م پر اور محور کو ط پر ملتا ہے ۔
ثابت کرو کہ خ م وتر خاص کا وسط گنا اور ل ط ' ۱ گنا ہے جہاں ن ل نقطہ ن سے محور پر عمود ہے

[کیتھن کالج ۱۸۸۵ء]

۹۶۔ شلجی کا راس ۱ اور ماسکہ س سے ہے اور اس پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے ، ن پر کا معین ن ل ہے ، اگر ماسکہ س میں سے س ن پر عمود کھینچا جائے اور یہ عمود ن پر کے عماد کو ع پر ملے اور ع کا معین ع م ہو تو ثابت کرو کہ س م = ۲ ل

[کون کالج ۱۸۸۶ء]

۹۷۔ ایک شلجی پر دو نقاط ن اور ق ہیں اور انکو ملانے والے وتر کا وسطی نقطہ ر ہے ، ر ل نقطہ ر کا معین ہے جو محور پر عمود ہے ن ق پر عمود رگ نکالا گیا ہے اور یہ محور کو گ پر ملتا ہے ۔

ثابت کرو کہ م گ شلجمی کے نیم وتر خاص کے برابر ہے
[سکین کالج سنہ ۱۸۸۶ء]

۹۸۔ ثابت کرو کہ وتر خاص چھوٹے سے چھوٹا ماسکی وتر ہے جو شلجمی میں کھینچا جا سکتا ہے۔

[کیٹھن کالج سنہ ۱۸۸۶ء]

۹۹۔ ایک ایسا شلجمی بناؤ جو تین دئے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرے اور جس کا ماسکہ ایک اور دئے ہوئے خط میں واقع ہو۔

۱۰۰۔ ایک شلجمی کے ماسکہ س سے ن پر کے ماس کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو منحنی کو ق پر ملتا ہے، ن میں سے گزرنے والا قطر س ق کو ع پر ملتا ہے ثابت کرو کہ ع کا طریق ایک ایسا شلجمی ہے جس کا وتر خاص دئے ہوئے شلجمی کے وتر خاص کا نصف ہے

[جیس کالج سنہ ۱۸۹۱ء]

۱۰۱۔ ایک شلجمی کے نقطہ ن پر کا عماد ن گ ہے عماد کے پائیں گ سے ایک خط گ ر ایسا کھینچا گیا ہے جو س ن پر عمود ہے اور جو اُس دائرہ کو جو س ن کو قطمان کر کھینچا جائے نقطہ ل پر ملتا ہے، اگر ل س کو خارج کیا جائے تو وہ ن پر کے ماس کو و پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ نسبت و س : و ن مستقل ہے۔

[سڈنی کالج سنہ ۱۸۹۱ء]

۱۰۲۔ شلجی خطوط اس طرح یکھئے گئے ہیں کہ وہ دو ثابت نقاط ۱ اور ب میں سے گزرتے ہیں اور ان کے محور ایک سمت معینہ میں واقع ہوتے ہیں، ان کے ماسکوں کا طریق دریافت کرو۔

[سینٹ جون کالج ۱۸۶۱ء]

۱۰۳۔ شلجی خطوط کا ایک سلسلہ ایسا ہے کہ اس کے ہر ایک منحنی (شلجی) کے راس پر کا ماس ایک اور دئے ہوئے شلجی کے راس پر کے ماس پر منطبق ہوتا ہے اور اس سلسلہ کے ہر ایک شلجی کا ماسک دئے ہوئے شلجی پر واقع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ شلجی خطوط ایک دوسرے کو دئے ہوئے شلجی کے ماسک پر قطع کرتے ہیں۔

[پتربوس ۱۸۶۱ء]

۱۰۴۔ ایک شلجی کے نقطہ ن پر کا ماس ایک ثابت دائرہ کو جس کا مرکز ماسک ہے ق اور ر پر ملتا ہے اگر شلجی کے باقی دو ماس جو ق اور ر میں سے گزرتے ہیں ایک دوسرے کو ط پر قطع کریں اور دائرہ کے ق اور ر پر کے ماس ایک دوسرے کو ص پر ملیں تو ثابت کرو کہ ط ص مرتب کے متوازی ہے۔

[پتربوس ۱۸۸۲ء]

۱۰۵۔ ایک شلجی کے ماسکی وتر کے نقطہ تنصیف میں سے ایک ایسا خط کھینچا گیا ہے جو مرتب پر عمود ہے

اور جس کا طول ماسکی وتر کا نصف ہے، اسکے سرے کا طریق دریافت کرو۔

[کلیہ ۱۸۸۴ء]

۱۰۶۔ ایک شلجی کے نقطہ ن سے راس پر کے ماس پر عمود ن م کھینچا گیا ہے، اگر نقطہ م سے ان پر عمود م ق نکالا جائے تو ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے [ترتبی ہوس ۱۸۸۴ء]

۱۰۷۔ ایک شلجی کے محور پر ایک ثابت نقطہ ہے، اس نقطہ میں سے ایک وتر ن ق گزرتا ہے، اگر ایک دئے ہوئے نصف قطر کا ایک دائرہ بنایا جائے جو ن اور ق کے معینوں کے پایوں میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے [جیس کا لچ ۱۸۸۴ء]

۱۰۸۔ ایک دائرہ لیک دئے ہوئے دائرہ کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتا ہے اور ایک دئے ہوئے خط سے ایک ایسا حصہ کاٹتا ہے جس کا طول ہمیشہ مستقل رہتا ہے، ثابت کرو کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق شلجی سے اور ان دائروں کے وتر تقاطع کا لفاف ایک محروطی تراش ہے۔ [جیس کا لچ ۱۸۸۴ء]

۱۰۹۔ ن س ن ایک شلجی کا ماسکی وتر ہے، ن اور ن میں سے گزرنے والے قطر ن اور ن پر کے

عاموں کو بالترتیب ص اور ص پر ملتے ہیں،
ثابت کرو کہ ن ص ص ن ایک متوازی الاضلاع ہے
[جیس کا پ ۱۸۸۶]

۱۱۰۔ ایک قطاع دائرہ ج ا ن ہے، دائرہ کا مرکز ج
ہے اور اس کے نصف قطر ج ا کو ثابت کر دیا گیا ہے،
اگر ج ا اور ج ن دونوں کو خارج کیا جائے اور ایک
ایسا دائرہ کھینچا جائے جو ان ممدودہ خطوط کو مس کرے
اور قوس ا ن کو بھی خارج جائے مس کرے تو ثابت کرو کہ
اس دائرہ کے مرکز کا طریق ایک شلجی ہے

[جون کا پ ۱۸۸۵]

۱۱۱۔ ایک شلجی ایک مثلث کے تینوں اضلاع کو مس
کرتا ہے اور اس کے محور کی سمت دی ہوئی ہے، ثابت کرو
کہ ذیل کے عمل سے اس کا ماسکہ معلوم ہو سکتا ہے۔
مثلث کے ایک راس الزاویہ ا میں سے دی ہوئی سمت
پر عمود د ا نکالو جو دائرہ ا ب ج کو د پر ملے، نقطہ د
میں سے مقابل کے ضلع پر عمود د س کھینچو جو دائرہ
مذکور کو س پر ملے، تب س شلجی کا ماسکہ ہو گا۔

[پتر ہوس ۱۸۸۳]

۱۱۲۔ ایک شلجی پر تین نقطے ن، ق، ر ہیں اور
شلجی کا ماسکہ س ہے، نقطہ ر میں سے خط ر د،
ر ص کھینچے گئے ہیں جو ن اور ق کے مماسات کے

بالترتیب متوازی ہیں اور جوق میں سے گزرنے والے قطر کو d اور v پر ملتے ہیں، ہندسی طریق سے ثابت کرو کہ $rd = ۴$ $s \times n \times q \times v$ اس نتیجے کی مدد سے ذیل کے مسئلہ کو ہندسی طریق سے ثابت کرو۔

ایک شلجی کے ماس طاق، طاق نقطہ پر کے ماس کو l اور v پر ملتے ہیں۔ جو قطر v میں سے گزرتا ہے اس کے سرے پر کا ماس n پر کے ماس کو v پر ملتا ہے، اگر s ماسک ہو تو ثابت کرو کہ

$$s \times n \times q \times r = ۲ \times s \times l \times m$$

[سنٹ جون کالج ۱۸۸۶ء]

۱۱۳۔ دو ہم ماسک اور ہم محور شلجی اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ ان کے قعر متقابل جانوں میں واقع ہیں، ایک مستقیم خط جو محور کے متوازی ہے ان کو n اور n پر ملتا ہے، ان کا وتر مشترک $q \times n \times n$ کو v پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ $rd = ۴$ $s \times n \times q \times v$: $n \times n$ ایک مستقل نسبت ہے،

[پنر ہوس ۱۸۸۳ء]

۱۱۴۔ ایک شلجی کے تین ماس کھینچنے سے ایک ماسی مثلث بنایا گیا ہے ہمیں معلوم ہے کہ اس مثلث کا بیرونی دائرہ ماسک میں سے گزرتا ہے، ثابت کرو کہ اس دائرہ کا ماس جو شلجی کے ماسک پر کھینچا جائے

محور سے ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جو ان تینوں زاویوں کے مجموعہ جبریہ کے مساوی ہوتا ہے جو شلجی کے مماس محور سے بناتے ہیں

[پتر ہوس ۱۸۸۳ء]

۱۱۵۔ ایک شلجی کے نقطہ N پر کا عماد NQ ہے اور P اس کا قطب ہے، ثابت کرو کہ N میں P میں سے گزرنے والے قطر کے راس میں سے گزرتا ہے۔

[پتر ہوس ۱۸۸۵ء]

۱۱۶۔ ایک متحرک مستقیم خط میں سے دو ثابت دائرے ہمیشہ مساوی وتر کاٹتے ہیں، ثابت کرو کہ یہ خط ہمیشہ ایک ایسے شلجی کو مس کرتا ہے جس کا ماسکہ دائروں کے مرکوزوں کے خط وصل کا نقطہ تنصیف ہے

[پتر ہوس ۱۸۸۵ء]

۱۱۷۔ اگر ایک شلجی کے ہر ایک نقطہ کے معین کو محور کے نیچے اتنا خارج کیا جائے کہ اس کا طول اس فاصلہ کے مساوی ہو جائے جو ماسکہ اور نقطہ مذکورہ کے درمیان سے تو ثابت کرو کہ معین کے سرے کا طریق ایک اور شلجی ہے اور ان منحنیات کے محور ایک دوسرے سے ایک ایسا زاویہ بناتے ہیں جو نصف زاویہ قائمہ کے برابر ہے،

[ملیر کاچ ۱۸۸۵ء]

۱۱۸۔ ایک شلجی کے دو ثابت ماس طاقی طر
ہیں ان کو ایک متغیر ماس لا اور ما پر ملتا ہے، اگر شلجی
کا ایک ایسا وتر کھینچا جائے جو لا ما کے مساوی
اور متوازی ہو تو ثابت کر دو کہ یہ وتر ایک مساوی شلجی
کولف کرتا ہے

[ترختی کالج ۱۸۸۴ء]

۱۱۹۔ ایک شلجی کے ایک نقطہ ن میں سے ایک ایسا خط کھینچا گیا ہے جو ن اور راس کے خط وصل پر عمود ہے، یہ خط محور کو ک پر ملتا ہے اور ن پر کا عماد محور کو گ پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ گ ک نصف وتر خالص کے برابر ہے۔

[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۴ء]

۱۲۰۔ شلجی کے ایک نقطہ میں سے دو وتر کھینچے گئے ہیں جو اس نقطہ پر کے مماس سے مساوی زاوے بناتے ہیں، اگر ان وتروں کے قطر کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ وتروں کے طول انکے قطروں کے اُن حصوں کے متناسب ہونگے جو مماسی اور قطروں کے درمیان واقع ہیں۔

[طہنتی کالج سہارا]

۱۲۱۔ \sin θ ایک مثلثی کا بائیسکی وتر ہے \sin θ اور \cos θ کو قطبان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ثابت کر دو کہ دائروں کے کسی مشترک مماس کا طول اس

اور ن ن کا وسط تناسب ہے

[ترقی کا لچ ۱۸۸۵ء]

۱۲۲۔ دو مستقیم خط ولا اور و ما ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں اور ایک مستقیم خط ن ق اُن کو نقاط ن اور ق پر قطع کرتا ہے، اور ن ق کا نقطہ متصفیف ایک ثابت مستقیم خط ا ب پر واقع ہوتا ہے، ثابت کرو کہ مستقیم خط ن ق ہمیشہ ایک ثابت شلجی کو مس کرتا ہے۔

[ترقی کا لچ ۱۸۸۵ء]

۱۲۳۔ اگر ن پر کا عماد ن گ محور کو گ پر ملے اور اگر نقطہ گ پر ایک معین گ ق قائم کیا جائے تو ثابت کرو کہ ن گ اور ق گ کے مربعوں کا فرق ایک مستقل مقدار کے برابر ہے

پیرک کا لچ ۱۸۸۵ء

۱۲۴۔ ایک مرکز دار تراش کا قطر ج ط ایک وتر ق ق کو ص پر کاٹتا ہے، منحنی کو ن پر اور ق پر کے تماس کو ط پر، ثابت کرو کہ ج ص \times ج ط = ج ن شلجی کی صورت میں یہ مسئلہ کیا ہوگا۔ اس کو ثابت کرو

۱۲۵۔ ن س ق ایک شلجی کا ماسکی وتر ہے۔ ن گ، ن پر کا عماد ہے اور ن ل نصف معین

ہے اگر ن ل کو اتنا خارج کیا جائے کہ وہ ق میں سے گزرنے والے قطر کو ح پر لے تو ثابت کرو کہ ح گ ' ن گ پر عمود ہے

[ٹرنٹی برس ۱۸۸۵ء]

۱۲۱۔ شلجی کے مرتب پر کوئی نقطہ وہ ہے نقطہ و سے شلجی کے دو ماس کھینچے گئے ہیں اور ماسکس میں سے ان ماسات کے متوازی دو مستقیم خط کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ مرتب کا جو حصہ ان متوازی خطوط کے درمیان واقع ہے اس کی تنصیف و پر ہوتی ہے

[کرائسٹ کالج ۱۸۸۵ء]

۱۲۲۔ رسی کے ایک حلقہ ون ق کو و پر باندھ دیا گیا ہے اور دو چھوٹے چھوٹے دانے ن اور ق بستی پر حرکت کر سکتے ہیں، اگر رسی کو ہمیشہ کس کر رکھا جائے اور ون، وق کے برابر ہو اور ن ق کی سمت ہمیشہ وہی رہے تو ثابت کرو کہ ن اور ق کے طریق دو شلجی خطوط ہیں جن دونوں کا ماسک و ہے۔

[کوین کالج ۱۸۸۵ء]

۱۲۸۔ ایک ثابت دائرہ پر ایک ثابت نقطہ و ہے دائرہ پر گئے کسی نقطہ میں کو ماسک اور و پر گئے ماس کو مرتب مانکر ایک شلجی کھینچا گیا ہے، اگر و سے س شلجی کے ماس یہ کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے

نقاط تماس کا طریق ایک دائرہ ہے۔

[کوین کالج ۱۸۸۵ء]

۱۲۹۔ اگر شلجی کے کسی نقطہ سے وتر کھینچے جائیں جو اس نقطہ پر کے تماس سے مساوی زاوے بنائیں تو ثابت کرو کہ ان کے طولوں کو آپس میں وہی نسبت ہوگی جو ان کے متوازی ماسکی و تروں کو ہے۔

[بکٹھرن کالج ۱۸۸۵ء]

۱۳۰۔ ایک دائرے ہوئے دائرے کے محیط پر ایک ثابت نقطہ د ہے اور ج دائرہ کا مرکز ہے، اگر کوئی وتر رس، د ج کے متوازی ہو اور اس وتر کا نقطہ تنصیف م ہو تو ثابت کرو کہ ج ر، ج س خط د م کو ایک شلجی پر قطع کرتے ہیں۔

[جیس کالج ۱۸۸۵ء]

۱۳۱۔ ایک نقطہ و کا قطبی خط بلحاظ ایک شلجی کے محور کو می پر ملتا ہے، اگر نقطہ می میں سے ایک مستقیم خط کھینچا جائے جو قطبی پر عمود ہو اور جو و س کو ر پر ملے تو ثابت کرو کہ و س = س ر

[جیس کالج ۱۸۸۵ء]

۱۳۲۔ تین شلجی خطوں کا ایک تماس مشترک ہے ثابت کرو کہ ان کے مشترک تماسوں کے جو باقی زوج ہیں ان کے نقاط تقاطع ایک ہی خط پر واقع

ہوتے ہیں۔

[جون کا چ ۱۸۸۳ء]
۱۳۳۔ ایک شلجی کے دو ماس کھینچے گئے ہیں، اگر انکے وتر ماس پر ماسک سے ایک عمود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ یہ عمود اس مقطوعہ کے نقطہ تنصیف میں سے گزرتا ہے جو اس پر کے ماس پر ان دو ماسوں کے درمیان واقع ہے۔

[جون کا چ ۱۸۸۳ء]
۱۳۴۔ مساوی شلجی خطوط کے کئی زوج کھینچے گئے ہیں، ہر ایک شلجی کا ماسک ایک دیا ہوا نقطہ سے ہے اور ہر ایک زوج کا ایک شلجی ایک دئے ہوئے خط اب کو مس کرتا ہے اور اس کا دوسرا شلجی خط اب کو مس کرتا ہے، ثابت کرو کہ ان کے مشترک ماسوں کا لغات ایک شلجی ہے جس کا مرتب س میں سے گزرتا ہے اور جو اب اور اب کو ایسے نقطوں پر مس کرتا ہے جن کا خط وصل س میں سے گزرتا ہے۔

[جون کا چ ۱۸۸۳ء]

۱۳۵۔ ایک شلجی کا ماسک س سے ہے اور اس کے تین نقاط 'ن'، 'ق'، 'ر' پر ہمیں ماس ولان، وماق، لارما کھینچے گئے ہیں۔ اگر ماس لاما اپنا مقام بدلے تو س کے علاوہ جو دوائے س ولان، س ماق

کا دوسرا تقاطع ہے اس کا طریق دریافت کرو۔

[پتر ہوس ۱۵۸۳ء]

۱۳۶۔ اگر دو شلجی خطوں کا ایک مشترک ماسکہ ہو تو ثابت کرو کہ جو خط ماسکہ کو مرتبوں کے نقطہ تقاطع سے ملتا ہے وہ شلجی خطوں کے مشترک ماس پر عمود ہے۔

[کلیہ کالج ۱۸۸۴ء]

۱۳۷۔ تین شلجی خطوں کا ایک ہی راس ہے اور ایک ہی محور۔ لیکن ان کے وتر خاص سلسلہ ہندسیہ میں ہیں۔ اگر بیرونی شلجی کے کسی نقطہ سے درمیانی شلجی کے دو ماس کھینچے جائیں اور ان کا وتر تاس ن ق ہو تو ثابت کرو کہ ن ق اندرونی شلجی کو مس کرتا ہے۔

[کلیہ کالج ۱۸۸۴ء]

۱۳۸۔ ایک مثلث دیا ہوا ہے، اگر ایک شلجی اسکے تینوں اضلاع کو مس کرے تو ثابت کرو کہ ہر ایک وتر تاس ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے گا۔

[ترقی کالج ۱۸۸۴ء]

۱۳۹۔ ایک شلجی کے ماسکہ کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے اور وہ ن پر کے ماس کو دو نقطوں پر کاٹتا ہے ایک نقطہ تو مرتب پر ہے اور دوسرا نقطہ ط ہے، س ن یا س ن ممدودہ پر عمود ط م نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ س م نصف وتر خاص

کے برابر ہے۔

۱۴۰۔ ایک بیرونی نقطہ و سے ایک شاخجی کے دو ماس وق اور وق کھینچے گئے ہیں اور نقطہ و سے محور پر عمود نکالا گیا ہے جو اس کول پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ ل ق اور ل ق محور سے مساوی زاوے بناتے ہیں۔

[کنہ کالج ۱۸۸۳ء]

۱۴۱۔ دو شاخجی خطوں کا ایک ہی ماسک ہے اور ایک ہی محور اگر ایک شاخجی کے نقطہ ن پر ماس کھینچا جائے تو وہ دوسرے شاخجی کے نقطہ ق پر کے ماس کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتا ہے اور ان ماسوں کا نقطہ تقاطع ط ہے ثابت کرو کہ ط اُن قطروں سے جو ن اور ق میں سے گزرتے ہیں مساوی فاصلوں پر واقع ہیں

[کرائسٹ کالج ۱۸۸۳ء]

۱۴۲۔ شاخجی کے ایک ماسکی وتر کے سروں پر کے ماس سے ن پر کے ماس سے ایک حصہ کاٹتے ہیں، ثابت کرو کہ اس حصہ یا مقطوعہ کے محاذی اُس نقطہ پر جو ن میں سے گزرنے والے قطر اور ماسکی وتر کا نقطہ تقاطع ہے زاویہ قائمہ بنتا ہے،

[کنہ کالج ۱۸۸۳ء]

۱۴۳۔ ایک ثابت نقطہ میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے اور اس خط پر ایک عمود قائم کیا گیا ہے جو ثابت نقطہ

میں سے گزرتا ہے، یہ عمود ایک اور ثابت خط کو ایک نقطہ پر کاٹتا ہے، اس نقطہ میں سے ثابت خط پر ایک عمود قائم کیا گیا ہے جو پہلے خط کو (یعنی اس خط کو جو ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے) ن پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک شلجی ہے۔

[کلیئر کا عجیب مسئلہ]

۱۴۴۔ متوازی مستقیم خطوں کا ایک نظام دیا ہوا ہے اس نظام کا ایک خط ا دو ثابت شلجی خطوں کو ن، ن اور ق، ق پر کاٹتا ہے، ن اور ن میں سے ایک شلجی کے محور کے متوازی دو خط کھینچے گئے ہیں، اسی طرح سے ق اور ق میں سے دوسرے شلجی کے محور کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ اس طرح سے جو شکل متوازی الاضلاع بنتی ہے اس کے نقاط راس ایک ثابت مخروطی تراش پر واقع ہوتے ہیں۔ [کرائسٹ کا عجیب مسئلہ]

۱۴۵۔ ایک شلجی کا راس ا ہے اور منحنی پر کوئی نقطہ ن ہے، ان کو ق تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ن ق = ان، نقطہ ق میں سے ایک مستقیم خط م ق ل کھینچا گیا ہے جو ا ق پر عمود ہے اور محور کو م پر ملتا ہے، اگر ت ل، ق م کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ ل کا طریق ایک شلجی ہے اس شلجی کا ل پر کا عماد دریافت کرو

[کوین کا عجیب مسئلہ]

۱۴۶۔ اگر ن پر کا عماد محور کو گ پر ملے تو ثابت کرو کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق جو ان گ کے گرد بنایا جائے ایک شلجی ہے [کون کا ج ۱۸۸۳]

۱۴۷۔ ایک شلجی کے تین ماس دئے ہوئے ہیں اور ایک ماس کا نقطہ تاس معلوم ہے، شلجی کو بناؤ اور اس کا ماسکہ دریافت کرو

[کیتھرین کا ج ۱۸۸۳]

۱۴۸۔ ایک مثلث متساوی الاضلاع ایک شلجی کے گرد بنایا گیا ہے ثابت کرو کہ مثلث کے تین اضلاع اور تین وتر تاس مرتب کو ایسے پانچ نقطوں پر کاٹتے ہیں جن میں سے دو مسلسل نقطوں کے درمیانی فاصلہ کے معادی ماسکہ پر مساوی تراوے بنتے ہیں [ترنی کا ج ۱۸۸۳]

۱۴۹۔ ایک شلجی کا وتر ن محور پر عمود ہے، اگر ن سے گزرنے والا قطر ن پر کے ماس اور عماد کو بالترتیب ق اور ر پر ملے تو ثابت کرو کہ ق ر کا وسطی نقطہ ایک ثابت شلجی پر واقع ہوگا

[جیس کا ج ۱۸۸۳]

۱۵۰۔ ایک شلجی کے دو نقطوں ن اور ق پر کے ماس ایک دوسرے کو ط پر اور انہی نقطوں پر کے عماد ایک دوسرے کو و پر قطع کرتے ہیں اگر محور پر عمود طم اور ول نکالے جائیں جو

محور کو م اور ل پر ملیں تو ثابت کرو کہ
 $ط م \times ل م = ول \times ل س$

[جیسس کالج ۱۸۸۷ء]

۱۵۱۔ ایک شلجی کے نقاط ن اور ق پر کے
 ماس نقطہ ط پر ملتے ہیں اور شلجی کے قطر کھینچ
 گئے ہیں جو ن ق کو تین مساوی حصوں میں
 تقسیم کرتے ہیں۔ اگر ان قطروں میں سے ایک
 کے سرے پر کا ماس ط ن پر عمود ہو تو ثابت
 کرو کہ مثلث ن ط ق مساوی الساقین ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۳ء]

۱۵۲۔ اگر وتر ن ق کا قطب ط ہو اور ن ق،
 ن ط سے زاویہ قائمہ بنائے (یعنی ن ق نقطہ
 ن پر کا عماد ہو) تو ثابت کرو کہ زاویہ ر ط ق
 قائمہ ہے۔

۱۵۳۔ ایک شلجی کے نقطہ ن پر کا عماد
 ن گ ہے، ن گ کے نقطہ وسطی سے منحنی
 کے دو عماد ر ق، ر ق کھینچے گئے ہیں، ثابت
 کرو کہ ق ق س، ق ق س محور سے مساوی زاویے
 بناتے ہیں۔

ہیلیجی

۱۵۴۔ دو خط اب اور اوج متقاطع علی القوائم ایک ایسے ہیلیجی کو نمس کرتے ہیں جس کا مرکز و ہے اور یہی خط ایک ایسے دائرہ کو جس کا مرکز و اور نصف قطر و ہے نقاط ب اور ج پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ و اور ب ج ہیلیجی کے مزدوج قطرون پر منطبق ہوتے ہیں

[آئی سی۔ یس]

۱۵۵۔ ایک ہیلیجی کے نقطہ ن پر کا عماد محور کو گ پر ملتا ہے اور ماسکہ س میں سے ن س ک کھینچا گیا ہے جو ج ن کے مزدوج قطر کو ک پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ نسبت ج گ : س ک ہیلیجی کے خروج المرکز کے برابر ہے

[آئی سی یس ۱۸۸۵]

۱۵۶۔ ایک ہیلیجی کے دو ماسکے اور ایک عماس دیا ہوا ہے اس کو بناؤ

[آئی سی ایس]

۱۵۷۔ ہیلیجی کے دو مزدوج قطر ج ن اور ج د ہیں،

اگر ن اور د پر بیلیجی کے عماد کھنچے جائیں اور ان کے نقطہ تقاطع اور بیلیجی کے مرکز کو ایک مستقیم خط کے ذریعہ ملایا جائے تو ثابت کرو کہ یہ خط مستقیم خط ن د پر عمود ہے۔

[اے۔ سی۔ ایس]

۱۵۸۔ ایک بیلیجی کے ماس کے س اور س ہیں اور ان کے مقابل مرتبوں کے پائیں لا اور لا ہیں، اگر بیلیجی کے کسی ماس پر عمود س م، س م نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ لا م، لا م ایک دوسرے کو محور اصغر پر قطع کرتے ہیں

[اے، سی، ایس^{۱۵۸}]

۱۵۹۔ بیلیجی کے مرکز سے ن پر کے ماس پر عمود نکالا گیا ہے اور اس عمود کا ظل محور اصغر پر ج ل ہے، اگر ایک دائرہ مثلث س ن س کے گرد بنایا جائے اور ن ق اس کا قطر ہو تو ثابت کرو کہ

$$ن ق \times ج ل = ل ج$$

[پتھر ہوس^{۱۵۹}]

۱۶۰۔ بیلیجی کے اندرونی نقطہ و سے دو عماد و اور و ب کھینچے گئے ہیں جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں، یہ عماد دو بارہ بیلیجی کو بالترتیب ج

اور د پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ

$$۱ : د ب = د ج : د$$

[پیرہوس مسئلہ]

۱۶۱۔ بیلیجی کے ایک وتر $ن د$ کا عمودی منصف نمود اعظم کوک پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ $ج ک = د ج$ اور جہاں $ر$ خروج المرکز ہے اور $ج ل$ وتر $ن د$ کے وسطی نقطہ کا فصلہ ہے جو مرکز $ج$ سے نپا گیا ہے۔

[پیرک کالج مسئلہ]

۱۶۲۔ دو ثابت مستقیم خطوں پر طول $ج ا$ ، $ج ب$ لئے گئے ہیں اور انکے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے، متوازی الاضلاع $ا ب ن ج$ کی تکمیل کی گئی ہے، ثابت کرو کہ $ن$ کا طریق ایک بیلیجی ہے جو ثابت خطوں پر مساوی حصے کاٹتا ہے۔

[کلیر کالج مسئلہ]

۱۶۳۔ بیلیجی پر کا کوئی نقطہ $ن$ دو مزدوج نیم قطروں $ج ا$ ، $ج ب$ کے سروں سے ملایا گیا ہے۔ $ن ا$ اور $ن ب$ اقطار $ج ب$ اور $ج ا$ کو بالترتیب $ب$ اور $ا$ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ
 $ا د \times ب ب = ۲ ج ا \times ج ب$

[کلیر کالج مسئلہ]

۱۶۴۔ ایک بیلیجی اور ایک دائرہ ہم مرکز ہیں اور بیلیجی

دائرہ کے بالکل باہر واقع ہے، ثابت کرو کہ دائرہ کا ایک متغیر مماس بلیجی سے جو رقبہ کاٹتا ہے وہ اقل یا اعظم اسوقت ہوگا جبکہ مماس بلیجی کے محور کے متوازی ہو، مختلف صورتوں میں تینز کرو

[کلیر کالج ۱۸۸۸ء]

۱۶۵۔ چار نقطے N, Q, R, S بلیجی پر ایسے ہیں کہ بلیجی کا مرکز ایک محور کے اس حصہ کی تنصیف کرتا ہے جو NQ اور RS کے درمیان واقع ہو، ثابت کرو کہ مرکز اس محور کے ان حصوں کی تنصیف کریگا جو NQ, RS اور NS, QR کے درمیان واقع ہوں گے

[ترتی کالج ۱۸۸۶ء]

۱۶۶۔ امدادی دائرہ کے قطر کے مقابل کے سروں سے بلیجی کے مماس کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان کے نقاط تقاطع مرتبوں پر واقع ہوتے ہیں

[ترتی کالج ۱۸۸۶ء]

۱۶۷۔ ایک دائرہ کا مرکز J ہے اور اسکے اندر ایک متغیر قائم الزاویہ مثلث NQR بنایا گیا ہے، Q زاویہ قائمہ ہے، اگر ضلع QR ہمیشہ ایک ایسے ثابت نقطہ S میں سے گزرے جو دائرہ کے اندر واقع ہو تو ثابت کرو کہ NQ ایک بلیجی کو مماس

کرتا ہے، اور اگر ق ج اور ن س ایک دوسرے کو و پر قطع کریں تو ر و اور ن ق کا تقاطع وہ نقطہ ہے جہاں ن ق ہیلیجی کو مس کرتا ہے
[لنڈن بی۔ اے اوئرز]

۱۶۸۔ ثابت کرو کہ ایک ہیلیجی میں مساوی مزدوج قطروں کا ایک زوج ہوتا ہے، اگر ہیلیجی کے محور اعظم کے ایک سرے کو ایک مساوی مزدوج قطر کے سرے سے ملایا جائے اور اس خط وصل کے متوازی محور اصغر کے سروں سے خطوط کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ یہ ہیلیجی کو اُن دو نقطوں پر چھوئے جہاں دوسرا مساوی مزدوج قطر اسکو ملتا ہے

[لنڈن بی۔ اے اوئرز]

۱۶۹۔ ایک مثلث دیا ہوا ہے، اس کے اندر ایک ہیلیجی بنانا ہے جو اسکے اضلاع کو مس کرے، اگر ایک ماسک کا مقام معلوم ہو تو ہیلیجی کو بناؤ اور اضلاع کے نقاط تماس دریافت کرو

[تیرنٹ ہوس ۱۸۸۸ء]

۱۷۰۔ ایک ہیلیجی کے اندر ایک ایسی شکل ذوالربعۃ الاضلاع بنائی گئی ہے جس میں ن ق اور س ر متوازی ہیں، اگر ق ر، ن س کے متوازی ہیلیجی کے تماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ تقاطع تماس کو ملانے والا خط ن ق اور س ر کے متوازی ہے۔ [موڈلن کالج ۱۸۸۸ء]

۱۷۱۔ ن ق ایک مثلجی کا وتر ہے اور ط اس کا قطب ہے ن ق پر کے ایک نقطہ کو مرکز مان کر ایک ایسا مثلجی بنایا گیا ہے جو مثلث ن ط ق کے نقاط الزویا میں سے گزرتا ہے، نقطہ ط پر، مثلجی کا تماس کھینچا گیا ہے اور بلحاظ مثلجی کے اس تماس کا قطب کئی ہے، ثابت کرو کہ ط ک مثلجی کے ایک ایسے قطر کے متوازی ہے جو ن ق کا مزدوج ہے
[کیتھرین کالج ۱۸۸۶ء]

۱۷۲۔ دو ہم ماسکے مثلجی دئے ہوئے ہیں، ان پر دو نقطے ن اور ق ایسے دئے گئے ہیں کہ ماسکون کو ملانے والے خط کے محاذی ان پر مساوی زاوے بنتے ہیں، ثابت کرو کہ ن اور ق پر کے تماسوں کا زاویہ تقاطع اس زاویہ کے مساوی ہے جو ن ق کے محاذی کسی ایک ماسکے پر بنتا ہے
[کیتھرین کالج ۱۸۸۶ء]

۱۷۳۔ ایک دائرہ کے محیط پر ایک ثابت نقطہ ۱ ہے اور دائرہ پر کے کسی نقطہ ن سے ۱ پر کے تماس پر ایک عمود ن م نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ ن م کے وسطی نقطہ کا طریق مثلجی ہے، اسکا مرکز اور اسکے محاور دریافت کرو
[کوبن کالج ۱۸۸۸ء]

۱۷۴۔ ایک ایسا ہلیجی بنایا گیا ہے جس کا مرکز ایک شلجی کے ماسک پر ہے اور جس کے مرتب شلجی کے وہ دو قطر ہیں جو وتر خاص کے سروں پر کھینچے جائیں، ثابت کرو کہ یہ ہلیجی، شلجی کو دو نقطوں پر مس کرتا ہے۔

[کیرن کالج مشہد ۱۸۸۸ء]

۱۷۵۔ ایک ہلیجی کے نقطہ ن پر کے ماس پر مرکز ج سے عمود نکالا گیا ہے اور اس کو اتنا خارج کیا گیا ہے کہ وہ ن پر کے معین ل ن محدودہ کو ر پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ر کا طریق ہلیجی ہے، نیز ثابت کرو کہ اگر ن، ق، ر پر بالترتیب ہلیجی، اداومی دائرہ اور ر کے طریق کے ماس کھینچے جائیں تو وہ ایک ہی نقطہ پر ملیں گے۔

[کیتھرن کالج مشہد ۱۸۸۸ء]

۱۷۶۔ دو ایسے دائرے کھینچے گئے ہیں جو ہلیجی کو مزدوج نقاط ن اور د پر مس کرتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک دائرہ مرکز ج میں سے گزرتا ہے ثابت کرو کہ ان کے نصف قطروں کو آپس میں وہی نسبت ہے جو ج ن کو ج د سے ہے۔

[کیتھرن کالج مشہد ۱۸۸۸ء]

۱۷۷۔ ایک ایسا شلجی بنایا گیا ہے جو ایک دے ہوئے ہلیجی کے ماسکوں میں سے گزرتا ہے اور جب کا

ماسک ہیلیجی پر کا کوئی نقطہ ہے، ثابت کرو کہ شاہجی کا مرتب ہیلیجی کے امدادی دائرہ کو مس کرتا ہے، نیز ثابت کرو کہ ہیلیجی کے ماسکوں پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع ایک دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

[جیس کا پٹہ ۱۷۸۸]

۱۷۸۔ ایک ثابت نقطہ و میں سے ایک فے ہوئے ہیلیجی کا ایک وترن ق کھینچا گیا ہے، ایک اور ہیلیجی بنایا گیا ہے جس کا رقبہ معلوم ہے اور جو ن اور ق میں سے گزرتا ہے اور شکلاً اور وضعاً دئے ہوئے ہیلیجی کے متشابه ہے ثابت کرو کہ اس ہیلیجی کے مرکز کا طریق ہیلیجی ہے

[جیس کا پٹہ ۱۷۸۹]

۱۷۹۔ ایک ہیلیجی کے محور اصغر کے سروں پر ماس کھینچے گئے ہیں ان میں سے ایک ماس ایک وتر خاص کو تنی پر ملتا ہے اور دوسرا ماس اس وتر خاص کے متعلقہ مرتب کو ف پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ی ف ہیلیجی کا ماس ہے،

[جیس کا پٹہ ۱۷۹۰]

۱۸۰۔ ہیلیجی کے ایک نقطہ ن سے اُس امدادی دائرہ کا ایک ماس کھینچا گیا ہے جو محور اصغر کو قطر مان کر کھینچا جائے۔ یہ ماس ہیلیجی کے مرتب دائرہ

کو ق اور ر پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن ق، ن ر نقطہ ن کے ماسکی فاصلوں کے برابر ہیں۔

[جیس کالج مشہد ۱۸۸۸ء]

۱۸۱۔ ایک ہیلیجی کے محاورہ دئے ہوئے ہیں ثابت کرو کہ منحنی پر کے نقاط غل ذیل سے دریافت ہو سکتے ہیں۔ محوروں کو قطر مان کر دائرے کھینچو اور مرکز سے ایک مستقیم خط کھینچو جو دائروں کو ن اور ق پر ملے، نقطہ ن میں سے ایک مستقیم خط قاطع محور کے متوازی کھینچو اور نقطہ ق میں سے ایک اور خط مزدوج محور کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ خط نقطہ ر پر ملتے ہیں، تب ر ہیلیجی پر واقع ہوگا اگر نصف محوروں کے مجموعہ کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے اور ون ق اس کو ص پر ملے تو ثابت کرو کہ ص ر نقطہ ر پر ہیلیجی کا عماد ہے

[جون کالج مشہد ۱۸۸۶ء]

۱۸۲۔ ن س ق اور ن س ر ایک ہیلیجی کے ماسکی وتر ہیں، ثابت کرو کہ ن پر کاماس اور وتر ق ر محور اعظم کو ایسے دو نقطوں پر قطع کرتے ہیں جو مرکز سے متساوی الفضل ہیں۔

[جون کالج مشہد ۱۸۸۸ء]

۱۸۳۔ ایک متوازی الاضلاع ایک ہیلیجی کے گرد

بنایا گیا ہے ، اگر ایسے دائرے کھینچے جائیں جو متوازی الاضلاع کے ہر ایک ضلع کے سروں میں سے اور ہلیجی کے ایک ماسکہ میں سے گزریں تو ثابت کرو کہ یہ سب دائرے مساوی ہیں ،

[کراٹ کا ج ۱۸۸۳ء]

۱۸۳- ایک ہلیجی کا مرکز ، ایک ماس ، محور اعظم کا طول ، اور ایک مرتب پر کا ایک نقطہ سب دئے ہوئے ہیں ، یہ معلوم کرو کہ اس کے مرتب کس طرح دریافت کئے جائیں۔ کن صورتوں میں عمل ناممکن ہوگا ؟

[پترہوس ۱۸۸۶ء]

۱۸۵- ن ن ایک ہلیجی کا قطر ہے ، اگر ن پر کا ماس مرتبوں کو دو نقطوں پر ملے اور ان نقطوں کو جداگانہ ہلیجی کے ماسکوں کے ساتھ دو مستقیم خطوں کے ذریعہ ملایا جائے تو ثابت کرو کہ یہ خط ایک دوسرے کو ن کے معین پر قطع کرتے ہیں

[کلیر کا ج ۱۸۸۶ء]

۱۸۶- ایک ہلیجی کے دو ماس ط ن ، ط ق کھینچے گئے ہیں نیز ہلیجی کے کسی نقطہ ط میں سے ہلیجی کا ایک وتر ط ر سٹ کھینچا گیا ہے ، نقطہ ر س کا وسطی نقطہ ص ہے ، ق ص ہلیجی کو ن پر ملتا ہے ، ثابت کرو کہ ن ن ، س ط کے متوازی ہے

[ترنٹی کا ج ۱۸۸۶ء]

۱۸۷۔ ایک ہیلیجی کا قطر d ہے، دو نقطے Q اور R ہیلیجی پر لئے گئے ہیں، Q ، d ، R نقطہ N پر ملتے ہیں اگر ایک ہیلیجی ایسا بنایا جائے جس کا مرکز d ہو اور جو N میں سے گزرے اور شکل اور وضعاً دے ہوئے ہیلیجی کے متساوی ہو تو ثابت کرو کہ یہ dN اور dQ سے ایسے وتر قطع کرے گا جن کے قطر بالترتیب dR اور dQ ہوں گے۔

[ترنتی کا پچہ ۱۸۷]

۱۸۸۔ ایک ہیلیجی کے نقطہ N پر کا ماس محور اصغر کوٹ پر ملتا ہے، اگر SN ممدودہ پر عمود طام نکالا جائے تو ثابت کرو کہ M کا طریق ایک دائرہ ہے۔

[ترنتی ہوس ۱۸۸]

۱۸۹۔ ایک ہیلیجی کے بیرونی نقطہ W سے خطوط WS اور WT کھینچے گئے ہیں جو W کو ماسکوں S اور T سے لاتے ہیں اور منحنی کو بالترتیب نقاط N اور Q پر قطع کرتے ہیں، نیز SQ اور SN کو ملایا گیا ہے اور وہ ایک دوسرے کو R پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ذواربعتہ الاضلاع $WNQR$ کے اندر ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے۔

[ترنتی ہوس ۱۸۹]

۱۹۰۔ اگر ایک ہیلیجی کے نقاط N اور Q کے

ماس امدادی دائرہ پر ملیں تو ثابت کرو کہ س ن
س ن کے متوازی ہے

[ٹرنٹی ہوس ۱۸۸۷ء]

۱۹۱۔ ایک ہیلیجی کے ماسکوں سے ن پر کے ماس
پر عمود نکالے گئے ہیں اور ان عمودوں کے پائین ما
اور ما ہیں، اگر ن ل نقطہ ن پر کا معین ہو تو ثابت
کرو کہ ن ل زاویہ حال ما کی تنصیف کرتا ہے۔

[موڈلن کالج ۱۸۸۷ء]

۱۹۲۔ ج ن، ج د ایک ہیلیجی کے مزدوج نیم قطر
ہیں، ن گ نقطہ ن پر کا عماد ہے، مرکز ج سے
ن پر کے ماس پر عمود ج سے نکالا گیا ہے، گ میں
سے ج د کے متوازی خط گ م کھینچا گیا ہے جو نقطہ
ن اور کسی ایک ماسک کو ملانے والے خط سے م
پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن م خطوط ج م، ج ب،
ج د کا چوتھا متناسب ہے۔

[موڈلن کالج ۱۸۸۷ء]

۱۹۳۔ ایک ہیلیجی کے دو ماسک س اور س ہیں
اور ہیلیجی کے محیط پر دو نقاط ن اور ق ہیں۔
ثابت کرو کہ خطوط س ن، س ق، س ن،
س ق (ممدودہ بشرط ضرورت) ایک ہی دائرہ کے
ماس ہیں۔

[کون کالج ۱۸۸۷ء]

۱۹۴۔ ہم ماسکہ ہیلیجی خطوط کا ایک سلسلہ معلوم ہے، اگر کسی ایک محور کے ایک ثابت نقطہ سے ہیلیجی خطوط کے تماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے نقاط تماس ایک دائرہ پر واقع ہوں گے

[کوین کا پج ۱۸۸۷ء]

۱۹۵۔ ایک ہیلیجی کے ماسکوں سے ن پر کے تماس پر عمود نکالے گئے ہیں اور ان عمودوں کے پائین صا اور ہے ہیں۔ اگر صا اور سے پر اداومی دائرہ کے تماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ یہ ن کے معین پر ملتے ہیں اور ان کے تقاطع کا طریق ایک ہیلیجی ہے

[کیتھرین کا پج ۱۸۸۷ء]

۱۹۶۔ ایک ہیلیجی کے نقاط ن' ن کے ماس ط پر ملتے ہیں اور انہی نقاط پر کے عماد محور کوگ، گ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن' گ کے محاذی نقطہ ط پر مساوی زاوے بنتے ہیں۔

[جیس کا پج ۱۸۸۷ء]

۱۹۷۔ ایک دائرہ کے ایک قطر پر دو ثابت نقطے ہیں جن کے فاصلے مرکز سے مساوی ہیں ایک شلجی ان نقطوں میں سے گزرتا ہے اور اس کا مرتب دائرہ کا ایک تماس ہے، ثابت کرو کہ اس کے ماسکہ کا طریق ایک ایسا ہیلیجی ہے جس کے ماسکے دو مذکورہ ثابت نقطے ہیں

[جیس کا پج ۱۸۸۷ء]

۱۹۸۔ ایک ہیلیجی کے محور اصغر کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے اور ہیلیجی کے ایک قطر کے ایک سرے سے اس دائرہ کے مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ یہ مماس اور مزدوج قطر کے کسی ایک سرے کے مماس کی فاصلے باہم ملکر ایک متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔ جسکے اضلاع کا فرق نصف محور اعظم کے برابر ہے۔

[جیس کا پ ۱۸۸]

۱۹۹۔ ایک ہیلیجی کے اندر ایک ایسا مثلث بناؤ جو ایک دئے ہوئے مثلث کے متشابه ہو۔

نوٹ۔ ہیلیجی مثلث مطلوب کے نقاط الزدایا میں سے گزرے گا۔

۲۰۰۔ ایک ہیلیجی کے دو مزدوج قطر امدادی دائرہ کو N اور Q پر ملتے ہیں، اگر N اور Q کے نظیری نقطے ہیلیجی پر N' اور Q' ہوں تو ثابت کرو کہ N اور Q پر کے مماس ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں

[جیس کا پ ۱۸۸]

۲۰۱۔ ج ۱ اور ج ۲ ایک ہیلیجی کے ثابت مزدوج قطر ہیں اور ج ۱، ج ۲ متغیر مزدوج قطر ہیں ان، ب ق ایک دوسرے کو ل پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ل کا طریق ایک ایسا ہیلیجی ہے جو شکل ۱ اور وضعاً مفروضہ ہیلیجی کا متشابه ہے۔

[جیس کا پ ۱۸۸]

۲۰۲۔ Γ ، Δ ہیلیجی کے دو مماس ہیں

اور ن گ ، ن گ نقاط ن ، ن پر کے عماد ہیں ،
اگر ط ن اور ط ن پر بالترتیب ایسے نقطے ق
اور ق لئے جائیں کہ ط ق = ط گ اور ط ق =
ط گ تو ثابت کرو کہ ق ق = ۲ ن ی جہاں ی
گ گ کا نقطہ تنصیف ہے

[جون کالج مشہد ۱۸۸۶ء]

۲۰۳۔ اگر ایک مستطیل ایک ہیلیجی کے گرد بن سکے
تو ثابت کرو کہ اس کے قطروں کی سمتیں ہیلیجی کے مزدوج
قطروں کی سمتیں ہیں۔

[جون کالج مشہد ۱۸۸۶ء]

۲۰۴۔ ایک ہیلیجی کا ایک ماسک س ہے اور ط ن
ط ق اس کے دو ماس ہیں ، ن ق ، اور س ط
ایک دوسرے کو لا پر قطع کرتے ہیں ، ن ق کے
وسطی نقطہ ص سے س ط پر ایک عمود ص ص ما
نکالا گیا ہے۔
ثابت کرو کہ

ن ص : ن لا × لا ق = س ما : س لا

۲۰۵۔ ایک ہیلیجی کے نیم محوروں ج ۱ ، ج ۲ ، ج ۳
پر دو ایسے نقطے ط ، ط لئے گئے ہیں کہ ط ط ،
۱ ب کے متوازی ہے ، اگر ط اور ط سے ہیلیجی
کے دو متصل ربعوں پر ماس کھینچے جائیں تو

ثابت کرو کہ وہ مزوج قطروں کے متوازی ہونگے۔

[پتر ہوس ۱۸۸۵ء]

۲۰۶۔ اگر ہیلیجی کے ماسکہ س میں سے ن پر کے ماس پر عمود س مانکالا جائے تو ثابت کرو کہ س ما اور ج ن ایک دوسرے سے مرتب پر ملتے ہیں۔

[پتر ہوس ۱۸۸۶ء]

۲۰۷۔ ن ن ایک ہیلیجی کا قطر ہے، ن اور ق پر کے ماس ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ہیلیجی کے نقطہ ق پر کا عماد زاویہ ن ق ن کی تصنیف کرتا،

[کلیر کالج ۱۸۸۶ء]

۲۰۸۔ ایک ہیلیجی کا وتر ن ن، ا ج پر عمود ہے اور اس کو اتنا خارج کیا گیا ہے کہ یہ امدادی دائرہ کو ن اور ن پر ملتا ہے، ن پر کا عماد ج ن اور ج ن کو بالترتیب ق اور ق پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ

$$ن ق = ن ق = ج د \text{ اور } ن ق = ب ج$$

[کلیر کالج ۱۸۸۷ء]

۲۰۹۔ ایک ہیلیجی کے نقطہ ن پر کا ماس محور اعظم کو ط پر ملتا ہے، اگر قطر ج د، ن ط کے متوازی ہو تو ثابت کرو کہ

ط ن + ج د = س ط × ط ح
 جہاں ج اور س ہیلیجی کے ماسکے ہیں۔

۲۱۰۔ اگر ہیلیجی پر کوئی نقطہ n ہو اور ماسکی فاصلہ s n مزدوج قطر کو c پر ملے تو ثابت کرو کہ j n اور s c کے مربعون کا فرق مستقل ہے

[ترنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۲۱۱۔ ایک ہیلیجی پر دو ثابت نقطے q ، r اور ایک متغیر نقطہ n لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ مثلث n q r کے مرکز عمودی کا طریق ایک متشابہ ہیلیجی ہے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۲۱۲۔ دو ہیلیجی خطوں کا ایک ماسکہ مشترک ہے اور ان کے محور اعظم مساوی ہیں، اگر ایک ہیلیجی اپنے ماسکہ کے گرد اپنی سطح میں چکر لگائے تو ثابت کرو کہ اس کا اور دوسرے ہیلیجی کا وتر تقاطع ایک ایسی ترش مخروطی کو لف کرے گا جو آخر الذکر ہیلیجی سے ہم ماسکہ ہوگی

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۲۱۳۔ ایک ہیلیجی کے نقطہ r سے دو وتر q اور r q مزدوج قطروں j n اور j d کے متوانی کھینچے گئے ہیں، r پر کا ماس q q محدودہ کو ط پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{رق}^{\circ}}{\text{ق}^{\circ}} : \frac{\text{رق}^{\circ}}{\text{ق}^{\circ}} = \text{ج}^{\circ} : \text{ج}^{\circ}$$

[ترتیبی کالج ۱۸۸۶ء]

۲۱۴۔ دو ہم مرکز بیلیجی دے ہوئے ہیں، انکا محور اعظم ایک ہی ہے اور ان کے نصف محور اصغر ج ب اور ج ب ہیں، پہلے بیلیجی پر کے کسی نقطہ ن کا معین دوسرے بیلیجی کو نقطہ ن پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ج ن - ج ب : ج ن - ج ب = ج ب : ج ب - ج ب : ج ب

[ترتیبی کالج ۱۸۸۶ء]

۲۱۵۔ بیلیجی خطون کا ایک سلسلہ بنایا گیا ہے، سب کے محور اعظم مساوی ہیں اور سب کے سب ایک ثابت مشترک نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور ایک ثابت مشترک ماسکہ رکھتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس سلسلہ کے دو متصل بیلیجی اس متحرک ماسکی وتر پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں جو ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے، نیز ثابت کرو کہ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ایسا بیلیجی ہے جس کے ماسکے وہ ثابت نقطہ اور ثابت ماسکہ ہیں۔

[پیرک کالج ۱۸۸۵ء]

۲۱۶۔ ایک بیلیجی کے مزدوج قطرون کے سروں پر ماس ط ن، ط ق کھینچے گئے ہیں، ماس ماسکہ

ہے اور طر، س ن پر عمود ہے، ثابت کرو کہ
 طر نصف محور اصغر کے برابر ہے

[کیز کالج ۱۸۸۵ء]

۲۱۷۔ ایک ہیلیجی کا ایک ماسک اور ایک ماس بلحاظ
 مقام معلوم ہیں نیز اس کے محور اصغر کا طول معلوم ہے
 ثابت کرو کہ اس کے مرکز کا طریق ایک مستقیم خط ہے

[کیز کالج ۱۸۸۵ء]

۲۱۸۔ ایک دیا ہوا مستقیم خط اس طرح حرکت کرتا ہے
 کہ اس کا ایک سر ہمیشہ ایک دائرہ کے محیط پر ہوتا ہے
 اور دوسرا سر دائرہ کے ایک ثابت قطر پر۔ اگر دائرہ کا
 نصف قطر اس خط کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ خط
 پر کا ہر ایک نقطہ ایک ہیلیجی مرتسم کرتا ہے، نیز ثابت
 کرو کہ ہر ایک ہیلیجی کے نصف محوروں کا مجموعہ اس
 دائرہ کے قطر کے مساوی ہے۔

[ترنتی ہوسس ۱۸۸۶ء]

۲۱۹۔ ن ق ہیلیجی کا ایک وتر ہے اور اس قطر ج ر
 کا سرا ہے جو ن ق کی تنصیف کرتا ہے، ن ق، ر
 کے مقابل امدادی دائرہ پر ن ق، ر نظیری نقطے
 ہیں، ثابت کرو کہ ر قوس ن ق کا وسطی نقطہ ہے،
 اگر ج ر ہیلیجی کو ط پر قطع کرے اور اس کے مقابل
 امدادی دائرہ پر نظیری نقطہ ط ہو تو ثابت کرو کہ

ج کا ، ن ق پر عمود ہے

[ک ۸۸۵]

۲۲۰۔ ایک ہیلیجی کے امدادی دائرہ پر ایک نقطہ ط ہے، اس نقطہ سے محور اعظم پر معین ط ن ن ل کھینچا گیا ہے جو ہیلیجی کو ن پر اور ط پر کے ماسون کے وتر متماس کو ن پر اور محور اعظم کو ل پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ

$$ل ن^2 = ل ن \times ل ط$$

۲۲۱۔ دو ثابت نقطے ل اور ب دئے ہوئے ہیں، کئی ایک ہیلیجی خط جن کا خروج المرکز معلوم ہے ل میں سے گذرتے ہیں، نقطہ ل پر ہر ایک ہیلیجی کا عماد ل ب ہے اور ہر ایک کا محور ب میں سے گذرتا ہے، ماسکون کے طریق دریافت کرو

[کیتھرن کالج ۸۸۶]

۲۲۲۔ ایک ہیلیجی کے ثابت قطر کا معین ن ل ہے، ن ل پر (یا بشرط ضرورت ن ل ممدودہ پر) ایک ایسا نقطہ ق لیا گیا ہے کہ ل ق کو ل ن سے وہی نسبت ہے جو ن ل کے مزدوج قطر کو ن ل کے متوازی قطر سے ہے، ثابت کرو کہ ق کا طریق ہیلیجی ہے، ایک محورون کے مقام دریافت کرو۔

[پتر ہوس ۸۶۱]

۲۲۳۔ ایک ہیلیجی پر دو نقطے ن اور ق ایسے ہیں کہ

انکے فضلوں کا مجموعہ مستقل ہے، ثابت کرو کہ ن اور ق کے ماسوں کا نقطہ تقاطع ایک ایسا بیلیجی ہے جو شکلاً اور وضعاً دئے ہوئے بیلیجی کا متشابہ ہے اور جو اس بیلیجی کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

[کینز کالج ۱۸۶۱ء]

۲۲۴۔ ایک بیلیجی کے وتر خاص کے ایک سرے مخ پر ماس ط مآخ سے کھینچا گیا ہے جو محور اعظم کو ط پر اور امدادی دائرہ کو مآ سے پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ نسبت مآخ کو مآ سے وہی نسبت ہے جو وتر خاص کو دو چند محور اعظم سے ہے۔

[جیسس کالج ۱۸۶۱ء]

۲۲۵۔ ایک بیلیجی کے نقاط ن اور ق پر ماس ط ن، ط ق کھینچے گئے ہیں، جو ہم ماسکہ بیلیجی ط میں سے گذرتا ہے اس کے نقطہ ط پر کا ماس ط ص، ن ق ممدودہ کو ص پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ

$$ص : ن = ص : ق = ط : ن$$

[ترنتی کالج ۱۸۶۱ء]

۲۲۶۔ اگر ایک بیلیجی کے نقطہ ن پر عماد ن گ نکالا جائے جو ایک محور کو گ پر ملے اور ن گ نقطہ ن کے ایک ماسکی فاصلہ کے مساوی ہو تو

ثابت کرو کہ N گ نقطہ N کے دوسرے ماسکی فاصلہ کے برابر ہوگا، اس میں g وہ نقطہ ہے جہاں عماد دوسرے محور کو ملتا ہے۔ [پیرہوس ۱۸۶۱ء]

۲۲۷۔ ایک شلجی پر کے نقطہ N سے مرتب پر عمود N م نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ AN اور SM کا نقطہ تقاطع ایک ہلیجی ہے، اس میں L منحنی کا راس ہے اور S ماسک۔ [کلیر کالج ۱۸۸۲ء]

۲۲۸۔ دو ہلیجی خطوں کے محور اصغر مساوی ہیں اور ان کا ایک ماسک مشترک ہے، اس کو ہندی طریق سے ثابت کرو کہ اگر ان کے مشترک ماسون کے نقاط تماس کو مستقیم خطوں کے ذریعہ لایا جائے تو ان خطوں کے جو مزدوج قطر ہونگے وہ منحنیات کے اعظم محوروں کے مناسب ہوں گے۔ [کلیر کالج ۱۸۸۳ء]

۲۲۹۔ ایک ہلیجی کے ماسک S ، S' ہیں اور اس پر دو نقطے N ، Q ہیں۔ ماسک S سے N اور Q پر کے ماسون پر عمود نکالے گئے ہیں اور یہ عمود SN ، $S'Q$ محدودہ سے بالترتیب N اور Q پر ملتے ہیں، NQ اور NQ' کا نقطہ تقاطع R ہے، ثابت کرو کہ SR مثلث NSQ کے خارجی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔

۲۳۰۔ ایک ہلیجی کے ماسک S اور S' ہیں اور مرکز J پر کے ماسون پر عمود SM ، $S'M$ سے نکالے گئے

ہیں، س ن، س سے ممدودہ ایک دوسرے کو ط پر ملتے ہیں، ط ج اور ماس ممدودہ ایک دوسرے کو ق پر ملتے ہیں اور اگر ط ق ماس کے گرد ایک دائرہ بنایا جائے تو ط س ممدودہ اس کو ر پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ر کا طریق ایک دائرہ ہے

[جیسس کالج ۱۸۸۱ء]

۲۳۱۔ اگر ایک بیلیجی کے کسی نقطہ ن سے وتر ن ق، ن ق محورون کے متوازی کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ن پر کا عادی ق کو ایک مستقل نسبت میں قطع کرتا ہے

[جیسس کالج ۱۸۸۲ء]

۲۳۲۔ کسی ایک نقطہ ط سے ایک بیلیجی کے ماس ط ن، ط ق کھینچے گئے ہیں، اگر ن ط ق کا منصف ایک ثابت نقطہ و میں سے گزرے جو محور اعظم پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ ط کا طریق ایک دائرہ ہے

[جیسس کالج ۱۸۸۲ء]

۲۳۳۔ ایک بیلیجی کے امدادی دائرہ پہ ایک نقطہ ط ہے، اس نقطہ سے بیلیجی کے دو ماس ط ن، ط ق کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ذواربۃ الاضلاع س س ن ق کے دو اضلاع متوازی ہیں، نیز ثابت کرو کہ اگر اس کے قطرون کا نقطہ تقاطع و ہو تو زاوے ج ط ن، و ط ق مساوی ہیں۔

[جیسس کالج ۱۸۸۲ء]

۲۳۳۔ ایک ہلیجی کے دو نقطوں N اور Q پر کے تماس ایک دوسرے کو ایک ہم مرکز دائرہ پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ NQ ایک ہم مرکز اور ہم محور ہلیجی کو مس کرتا ہے اور اس ہلیجی کے محوروں کی باہمی نسبت پہلے ہلیجی کے محوروں کی نسبت مثلاً $۱:۲$ کے برابر ہے، اور ثابت کرو کہ NQ کا نقطہ تماس (اپنے لفاف کے ساتھ) NQ کی کبھی تنصیف نہیں کرتا سوائے اُس صورت کے جبکہ NQ ان دو ہلیجی خطوں کے محور پر عمود ہو

[جیس کاچ ۱۸۸۶ء]

۲۳۵۔ ایک ثابت دائرہ پر ایک نقطہ N ہے، خط NL کو ایک دی ہوئی سمت میں کھینچا گیا ہے اور اس کا طول مستقل ہے۔ نیز اگر NL کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو وہ دئے ہوئے دائرہ کو Q پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ NQ ہمیشہ ایک ثابت ہلیجی کو مس کرتا ہے۔

[جیس کاچ ۱۸۸۶ء]

۲۳۶۔ اگر ایک ہلیجی کے ایک ماسکی وتر کے متوازی ایک قطر کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ ماسکی وتر، محور اعظم اور اس قطر کا تیسرا متناسب ہے۔

جیس کاچ ۱۸۸۶ء

۲۳۷۔ ن س ق ایک ہلیجی کا ماسکی وتر ہے اور
ن اور ق پر کے ماس ایک دوسرے کو سے پر ملتے
ہیں، ثابت کرو کہ

$$\text{نس} = \text{بج} + \text{س} : ۲ = \text{ج} : ۱ : \text{ن ق}$$

[جیس کا پ ۱۸۸۶ء]

۲۳۸۔ اگر ایک ہلیجی کے مزدوج نقطوں ن اور د پر
کے عماد ایک دوسرے کو ع پر ملیں تو ثابت کرو کہ ج ع
ن د پر عمود ہے

[جون کا پ ۱۸۸۵ء]

۲۳۹۔ ایک ایسا دائرہ کھینچا گیا ہے جو ایک ہلیجی کے
ماسکوں اور محور اصغر کے ایک سرے میں سے گذرتا ہے
اور منحنی کو ن اور ق پر ملتا ہے، اگر ن اور ق پر کے
ماسوں پر مرکز سے عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ
ان میں سے ہر ایک عمود ماسک اور مرکز کے درمیانی
فاصلہ کے برابر ہے

[جون کا پ ۱۸۸۵ء]

۲۴۰۔ دو دائرے دئے ہوئے ہیں، ایک کا نصف
قطر دوسرے کا دو چند ہے اور چھوٹا دائرہ بڑے دائرے
کے اندر محیط پر پھرایا جاتا ہے، ثابت کرو کہ پھر نے والے
دائرے کے رقبہ پر کا کوئی نقطہ ایک ہلیجی مرسم کرتا ہے
نیز ثابت کرو کہ جو ہلیجی ایک نصف قطر کا وسطی نقطہ

مرسم کرتا ہے اور جو ہیلیجی مذکور نصف قطر مدودہ کا وہ نقطہ
مرسم کرتا ہے جو لڑھکنے والے دائرہ کے مرکز سے اس کے
قطر کے فاصلہ پر واقع ہو دونوں متشابہ منحنی ہیں۔

[جون کا چ ۱۸۸۵ء]

۲۴۱۔ ایک ہیلیجی کے دو متوازی مماس اس کو ن اور
ق پر مس کرتے ہیں، نقطہ r پر ایک اور مماس ان کو
ط اور ط پر کاٹتا ہے اور ن ط اور ق ط ایک دوسرے کو ص
پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ر ص، ن ط اور ق ط کے
متوازی ہے اور انکی نصف موسیقی اوسط کے برابر ہے۔

[جون کا چ ۱۸۸۵ء]

۲۴۲۔ ہیلیجی کے مرتب دائرہ کی ہستی کو ثابت کرو اور
ثابت کرو کہ ہیلیجی کا مرتب خط، اس کے مقابل کے اس کے
کے نقطہ دائرہ اور مرتب دائرہ کا محور اصلی ہے

[جون کا چ ۱۸۸۶ء]

۲۴۳۔ ایک ہیلیجی کے مرکز ج سے ن پر کے مماس پر
عمود ج ک کھینچا گیا ہے اور دائرہ ن ک ب محور اعظم
کو م پر ملتا ہے اگر م کو مرکز اور ج ب کو نصف قطر
مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے اور وہ محور اصغر کو نقاط
ل اور ل پر کاٹے تو ثابت کرو کہ شکل م ل گ ل کے
گرد ایک دائرہ بن سکتا ہے۔

[پتر پوس ۱۸۸۴ء]

۲۴۴۔ ایک ہیلیجی دو ثابت نقطوں A اور B میں سے گذرتا ہے اور وہ شکل A اور وضعاً ایک ثابت ہیلیجی کے متشابه ہے جسکو B اور D پر کاٹتا ہے، A ج، D ثابت ہیلیجی کو دوبارہ E اور F پر کاٹتے ہیں، ثابت کرو کہ خطوط B ج، D ، E ف میں سے ہر ایک ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

[پتر ہوس ۱۸۸۴]

۲۴۵۔ ایک ہیلیجی کے ماسکے S اور H ہیں، P اور Q ہیلیجی کے دو ماس ہیں جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں نیز P م، S ن پر عمود ہے ثابت کرو کہ

$$S \times P \times H = P \times M \times A \text{ ج}$$

[پتر ہوس ۱۸۸۴]

۲۴۶۔ دو ہم ماسکے ہیلیجی دئے ہوئے ہیں، بیرونی ہیلیجی کے نقطوں سے اندرونی ہیلیجی کے ماس کھینچے گئے ہیں، وتر PM کا لفافہ دریافت کرو۔

[کلیر کا ج ۱۸۸۵]

۲۴۷۔ ایک ہیلیجی کے محور اعظم پر ایک ثابت نقطہ ہے اور اس میں سے ہیلیجی کا ایک وتر گذرتا ہے، اس وتر کو قطر AN کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ ہیلیجی اور دائرہ کے باقی دو نقاط تقاطع کو ملائے والا وتر محور اعظم پر کے ایک

اور ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

[کلیئر کا پج ۱۸۸۵]

۲۴۸۔ ایک ہیلیجی کے ماسکے میں اور میں اور اس کا محور اعظم AA' ہے، AA' اور AA' بالترتیب میں N اور N' کے متوازی کھینچے گئے ہیں اور وہ N پر کے ماس کو R اور R' پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ

$$AN + A'R = AA'$$

[کلیئر کا پج ۱۸۸۵]

۲۴۹۔ ایک ہیلیجی کے نقطہ N پر کا ماس اور AA' محور اعظم کو بالترتیب P اور Q پر ملتے ہیں، اگر GP جیسے مقطوعات کو قطمان کر دائرے کھینچے جائیں۔ تو ثابت کرو کہ ان سب کا ایک ہی محور اصلی ہوگا۔

[کلیئر کا پج ۱۸۸۵]

۲۵۰۔ دو ہیلیجی ایک ہی سطح میں واقع ہیں اور ان کا ایک ماسک مشترک ہے، ایک ہیلیجی اس مشترک ماسک کے گرد چکر لگاتا ہے اور دوسرا اپنی جگہ قائم رہتا ہے، ثابت کرو کہ ان کے مشترک ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے۔

[ترنٹی کا پج ۱۸۸۵]

۲۵۱۔ ایک ہیلیجی کے ایک راس سے N پر کے ماس پر عمود AN کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ N اور

ق ۱ ممدودہ کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے،
اس میں سے ہیلیجی کا ایک ماسکہ ہے۔

[ترنٹی کالج ۱۸۸۵ء]

۲۵۲۔ ایک ہیلیجی کے محیط پر ایک نقطہ ن ہے اور
س اور س اس کے ماسکے ہیں، ہیلیجی کے مرکز میں
سے میں دو مساوی اور مستقل خط س ن اور ن س
کے متوازی کھینچے گئے ہیں اور متوازی الاضلاع کی تکمیل
کی گئی ہے، ثابت کرو کہ اس متوازی الاضلاع کے
چوتھے نقطہ ر اس کا طریق ایک دائرہ ہے۔

[ترنٹی کالج ۱۸۸۵ء]

۲۵۳۔ ایک ہیلیجی کے ماسکے س اور ح ہیں اور محور اعظم
ممدودہ پر کوئی نقطہ ط ہے، س ح کو قطر مان کر ایک دائرہ
کھینچا گیا ہے، نیز ایک اور دائرہ کھینچا گیا ہے جو پہلے
دائرہ کو زاویہ قائمہ پر کاٹتا ہے اور محور اعظم سے نقطہ
ط پر زاویہ قائمہ بناتا ہے، ثابت کرو کہ دوسرا دائرہ ہیلیجی
کو ان دو نقطوں پر ملتا ہے جہاں نقطہ ط کا قطبی خط
(بلحاظ ہیلیجی کے) ہیلیجی کو ملتا ہے

۲۵۴۔ ایک ہیلیجی کے نقطہ ن پر کا عماد محور ن کو گ
اور گ پر ملتا ہے، اگر مرکز سے ن پر کے ماس پر عمود
ج ک ہو اور ج گ، ج گ کے نقاط تنصیف و اور و
ہوں تو ثابت کرو کہ

وب = وک = ون اور
وَا = وک = وَن

[ترنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۲۵۵۔ ایک ہلیجی کے ماسکون س اور ح سے ایک
ماس پر عبود س ما اور ح ما نکالے گئے ہیں اور چار
محور اعظم نظیری مرتبوں کو ملتا ہے وہ نقاط لا اور لا
ہیں، ثابت کرو کہ لا ما اور لا ما ایک دوسرے کو محو
پر قطع کرتے ہیں

[ترنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۲۵۶۔ ایک کاغذ پر ایک ہلیجی بنا ہوا ہے، معلوم کرو
کہ اس کے اصلی محور کس طرح دریافت کئے جائیں۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۲۵۷۔ ایک ہلیجی کے محور اعظم کے ایک سرے پر ایک
ماس کھینچا گیا ہے اور اُس پر ایک نقطہ ن لیا گیا ہے
اگر نقطہ ن سے ہلیجی کا دوسرا ماس ن ط کھینچا جائے
تو ثابت کرو کہ ن ط، ن لا سے زیادہ لمبا ہے۔

[پمبرک کالج ۱۸۸۵ء]

۲۵۸۔ دو ہلیجی شکل اور وضعاً متشابہ ہیں ان کے
بالترتیب ج اور ج ہیں اور وہ ایک دوسرے کو اس
پر مس کرتے ہیں، نقطہ لا میں سے ایک وتر کھینچا گیا ہے
ہلیجی خطوں کو ن اور ق پر بالترتیب ملتا ہے، نیز ن ج

اور ق ج ایک دوسرے کو ر پر قطع کرتے ہیں، ر کا طریق دریافت کرو۔

[پہرک کالج ۱۸۸۳ء]

۲۵۹۔ ایک ہیلیجی کے اداوی دائرہ پر ایک نقطہ ط ہے، اس نقطہ سے ہیلیجی کے دو ماس کھینچے گئے ہیں جو منحنی کو ن اور ق پر مس کرتے ہیں، اگر ان نقطوں میں سے گزرنے والے قطر ن، ق، ق، ہوں تو ثابت کرو کہ ن، ق، ق، ہیلیجی کے ماسکی وتر ہیں۔

[پہرک کالج ۱۸۸۳ء]

۲۶۰۔ ایک ہیلیجی کے محیط پر کوئی نقطہ لیا گیا ہے، ایک ایسا مثلث بنایا گیا ہے جس کے نقاط ر اس نقطہ مذکورہ ہیلیجی کا مرکز اور ہیلیجی کا ایک ماسکہ ہیں، ثابت کرو کہ اس مثلث کے مرکز ثقل کا طریق ایک متشابہ ہیلیجی ہے۔

[ترنتی ہال ۱۸۸۵ء]

۲۶۱۔ ایک ہیلیجی کے محور اعظم کے سروں پر ماس کھینچے گئے ہیں اور وہ ہیلیجی کے کسی نقطہ پر کے ماس کو ر اور ر پر ملتے ہیں، ر کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ یہ ہیلیجی کے ماسکوں میں سے گزرتا ہے۔

[ترنتی ہال ۱۸۸۵ء]

۲۶۲۔ ایک ہیلیجی کے محور اعظم پر دو ثابت نقطے لے گئے ہیں، ایک نقطہ میں سے ایک خط س ن کے متوازی

کھینچا گیا ہے اور دوسرے نقطہ میں سے ماس اور ماس کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ آخری دو خط پہلے خط کو ایسے دو نقطوں پر ملتے ہیں جو ایک ثابت دائرہ کے ایک قطر کے سرے ہیں۔

[ترغتی ہل ۱۸۸۵ء]

۲۶۳۔ ایک ہیلیجی کے نقطہ ن پر کا عا و محوروں کو گ اور گ پر ملتا ہے، گ، گ کے قطر پر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے نیز ن کو مرکز مان کر ایک اور دائرہ بنایا گیا ہے جو پہلے دائرہ کو زاویہ قائمہ پر کاٹتا ہے اور خط ن گ گ کو ق اور ق پر ثابت کرو کہ مثلث س ن ق اور س ن ق متشابه ہیں۔

[کرائسٹ کالج ۱۸۸۵ء]

۲۶۴۔ ایک دائرے ہوئے دائرہ کے کسی نقطہ ق سے دائرہ کے ایک ثابت ماس پر عمود ق ر نکالا گیا ہے اور ق ر کو نقطہ ن پر اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ ق ن : ن ر ایک دسی ہوئی نسبت کے برابر ہے، ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک ہیلیجی ہے۔

[کون کالج ۱۸۸۵ء]

۲۶۵۔ اگر ایک ہیلیجی کے اوتار خاص میں سے گزرنے والے قطر ایک دوسرے کے مزدوج ہوں تو ثابت کرو کہ ماس کو نکلانے والے خط کے محاذی محور اصغر کے سروں پر زاویے

قائے بنتے ہیں۔

[کوین کالج ۱۸۸۵ء]

۲۶۶۔ ایک ہیلیجی کے نقطہ N پر کا عماد محور اصغر کے ایک سرے میں سے گذرتا ہے، اگر ماسکوں کو ملانے والے خط کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ یہ دائرہ ہیلیجی کے N پر گئے تماس کو مس کرے گا

[کوین کالج ۱۸۸۵ء]

۲۶۷۔ ایک دائرہ ہیلیجی کے ماسکے S میں سے گذرتا ہے اور ہیلیجی کو دو ایسے نقطوں N اور Q پر مس کرتا ہے جو بلحاظ محور کے متشاکل ہیں، ثابت کرو کہ

$SN = SQ = \text{وتر خاص}$

[کیتھرین کالج ۱۸۸۵ء]

۲۶۸۔ ذیل کے مسئلہ کا ظنی مسئلہ دریافت کرو۔
اگر ایک دائرہ کے دو نصف قطر OA اور OB ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں اور OA مدودہ اور OB مدودہ پر بالترتیب نقطے N اور Q لئے جائیں تو N ب اور Q کا نقطہ تقاطع دائرہ کے محیط پر واقع ہوگا اگر سطح $AN \times BQ$ باقی نصف قطر کے مربع کے دو چند کے برابر ہو [جون کالج ۱۸۸۳ء]

۲۶۹۔ ایک بیلیجی کے نصف محور ج ۱ اور ج ب ہیں اگر مستطیل ۱ ج ب ص کی تکمیل کی جائے اور منحنی س ص کی تنصیف کرے تو ثابت کرو کہ

$$۱ ج' + ب ج' = ۲ ج ۱ ج \times ج س$$

[پیر ہوس ۱۸۸۳ء]

۲۷۰۔ بیلیجی کے ماسکہ میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو محور پر عمود ہے، اس خط پر کوئی نقطہ لیا گیا ہے اور اس نقطہ سے بیلیجی کے دو مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ نظیری مرتب کا جو مقطوعہ ان مماسوں کے درمیان واقع ہوتا ہے محور اسکی تنصیف کرتا ہے

[پیر ہوس ۱۸۸۳ء]

۲۷۱۔ ن س ق، ن ح ر ایک بیلیجی کے ماسکی وتر ہیں، نقاط ق اور ر پر مماس ق ط، ر ط کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ن پر کا مماس ن ط ہے۔

[پیر ہوس ۱۸۸۴ء]

۲۷۲۔ ایک بیلیجی کے نقاط ن اور ق پر کے مماس ط ن اور ط ق ہیں، ان کے متوازی نصف قطر بالترتیب ج ن اور ج ق ہیں، ط ن اور ن ج (جن کو بشرط ضرورت بڑھایا جاسکتا ہے) ایک دوسرے سے ل پر ملتے ہیں اور ط ق اور ق ج نقطہ م پر ملتے ہیں۔ ن م اور ق ل کو بڑھایا گیا ہے اور

وہ ایک دوسرے کو ص پر ملتے ہیں،
ثابت کرو کہ ط ج ص ایک مستقیم خط ہے۔

[پیرہوس ۱۸۸۲ء]

۲۷۳۔ ایک دائرہ اور ایک ہیلیجی کا ایک مشترک
قطر ہے، اس قطر پر ایک نقطہ لیا گیا ہے اور
اس نقطہ سے دائرہ اور ہیلیجی دونوں کے مماس
کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ نقاط تماس کو ملانے والا
خط ایک ثابت خط کے متوازی ہیں۔

[کلیر کالج ۱۸۸۲ء]

۲۷۴۔ ہیلیجی خطوں کا ایک سلسلہ ہے، اس سلسلہ
کے سب خطوں کا مرکز مشترک ہے اور ان کے دو
مزدوج قطروں کی سمتیں دی ہوئی ہیں، نیز ان کے
محوروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے، ثابت کرو کہ
وہ سب کے سب چار مستقیم خطوں کو مس کرتے ہیں

[کلیر کالج ۱۸۸۲ء]

۲۷۵۔ ایک دے ہوئے نقطہ و میں سے ایک
ہیلیجی کا وتر دن ق کھینچا گیا ہے، سطح دن و حق
کی اقل اور اعظم قیمتیں دریافت کرو

۲۷۶۔ ایک ہیلیجی پر تین نقطے ن، ق، ر لئے
گئے ہیں اور اس کا مرکز ج ہے، قطر ا ج د، ناق
کی تنصیف کرتا ہے اور رن، ر ق اس کو ل اور

ط پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ج ل \times ج ط = ج ل
 [ترنتی کالج ۱۸۸۳ء]
 ۲۷۷۔ ایک ہیلیکس کا ایک ماسکی وتر کھینچا گیا ہے
 اور وتر کے سروں کے مقابل امادی دائرہ پر جو
 نقطے ہیں ان کو ایک مستقیم خط کے ذریعہ ملا دیا گیا
 ہے، ثابت کرو کہ یہ خط اس قطر کے مساوی ہے
 جو ماسکی وتر کے متوازی ہے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۳ء]
 ۲۷۸۔ معلوم کرو کہ ایک دے ہوئے ہیلیکس میں ایک
 خاص طول کا ماسکی وتر کس طرح کھینچا جاسکتا ہے،
 اگر دو وتر ن ق اور ن ق اس طرح کھینچے جائیں تو
 ثابت کرو کہ ن ن ق ق کے گرد ایک دائرہ
 کھینچ سکتا ہے۔
 [ترنتی کالج ۱۸۸۳ء]
 ۲۷۹۔ اگر ایک ہیلیکس کے اندر ایک ایسا مثلث
 بن سکے جس کا مرکز نقل ہیلیکس کے مرکز پر ہو تو
 ثابت کرو کہ یہ بڑے سے بڑا مثلث ہے جو منحنی
 کے اندر بن سکتا ہے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۳ء]
 ۲۸۰۔ اگر ایک ہیلیکس کا عماد ن گ، ب میں
 سے گذرے تو ثابت کرو کہ ب گ ماسکوں کے
 درمیانی فاصلہ کا نصف ہے [پبرک کالج ۱۸۸۳ء]

۲۸۱۔ اگر ایک ہیلیجی کا ایک ماسکہ، ایک ماس اور اس کا نقطہ تماس تینوں معلوم ہوں تو اس کے مرکز کا طریق دریافت کرو

[کیزکالج ۱۸۸۴ء]

۲۸۲۔ ایک ہیلیجی کے ماسکے سے اور ح میں اور اس کے دو ماس ط ق، ط ق ہیں۔ ط ر، ط ر کو بالترتیب ط س، ط ح کے مساوی قطع کیا گیا ہے ثابت کرو کہ ر ر محور اعظم کے مساوی ہے اور اگر ط س، ر ر کو ی پر قطع کرے تو ط می، ط ق کے مساوی ہوگا۔

۲۸۳۔ ایک مستقیم خط کا طول معلوم ہے، اس کا ایک سر ایک ایسے دائرہ کے محیط پر حرکت کرتا ہے جس کا نصف قطر مستقیم خط کے طول کے برابر ہے اور اس کا دوسرا سر دائرہ کے ایک ثابت قطر پر حرکت کرتا ہے، ثابت کرو کہ اس خط پر کا ہر ایک نقطہ ایک ہیلیجی مرشم کرتا ہے، نیز ثابت کرو کہ ایسے ہر ایک ہیلیجی کے نصف محور کا مجموعہ دائرہ کے قطر کے برابر ہے۔

[ہوڈلن کالج ۱۸۸۴ء]

۲۸۴۔ اگر ایک ہیلیجی کے نقطہ ن پر کا ماس ماس ۱ پر کے ماس کو ط پر ملے اور نقطہ ۱ سے

بیلیجی کا بیدتر ماسکہ سن ہو تو ثابت کرو کہ ط ۱ اس
عمود کے برابر ہے جو ط سے سن ن پر نکالا جا۔
[کونین کالج ۱۸۸۴ء]

۲۸۵۔ ایک بیلیجی پر کے دو مزدوج نقطون ن اور د
پر تماس کھینچے گئے ہیں اور ان تماسوں پر مرکز سے
عمود ج مآج سے نکالے گئے ہیں، اگر د ج
ممدودہ بیلیجی کو دوبارہ نقطہ د پر لے تو ثابت کرو کہ
ن د اس دائرہ کا قطر ہے جو مثلث مآج سے کے
گرد بن سکتا ہے۔

[کونین کالج ۱۸۸۴ء]

۲۸۶۔ ایک بیلیجی کا امدادی دائرہ دیا ہوا ہے اور
بیلیجی کا ایک تماس معلوم ہے جو منحنی کو ایک دے
ہوئے نقطہ پر مس کرتا ہے بیلیجی کے ماسکے دریافت کرو
[کیترین کالج ۱۸۸۴ء]

۲۸۷۔ ایک بیلیجی کا محور اعظم ۱ ہے، اگر منحنی کے
کسی نقطہ پر کے تماس پر ماسکوں سے عمود سن مآ
اور سن مآ نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ ۱ مآ اور ۱ مآ
کے نقطہ تقاطع کا طریق بیلیجی ہے۔

[ترتبی کالج ۱۸۸۵ء]

۲۸۸۔ ق ص ق ق طرح ن کا دگن معین ہے،
بیلیجی کے مرکز ج سے ق ق پر عمود نکالا گیا ہے

اور یہ امدادی دائرہ کو r پر ملتا ہے، j میں سے ایک $خ$ n کے متوازی کھینچا گیا ہے جو $ص$ میں سے گزرنے والے خط کو جو $ق$ پر عمود ہو نقطہ $و$ پر ملتا ہے، اگر ایک ایسا بیلیجی کھینچا جائے جو $ق$ اور $ق$ میں سے گزرے اور جس کا مرکز $و$ ہو اور محور اعظم $د$ ہوئے بیلیجی کے محور اعظم کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس کا محور اصغر $دج$ $د$ کے مساوی ہوگا۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۲۸۹۔ ایک بیلیجی کے ماسکون $س$ اور $ح$ میں سے دو خط $ن$ $س$ $ن$ اور $ق$ $ح$ $ق$ کھینچے گئے ہیں جو دو ماسوں $ن$ $ق$ $ن$ $ق$ کو ملتے ہیں، نیز $ن$ $ق$ $ق$ کی تصنیف بالترتیب $س$ اور $ح$ پر ہوتی ہے، ثابت کرو کہ ذواربعۃ الاضلاع $ن$ $ق$ $ق$ $ن$ کے گرد ایک دائرہ بن سکتا ہے۔

[جیسس کالج ۱۸۸۷ء]

نوٹ۔ ماس $ن$ اور $ن$ پر کھینچے گئے ہیں۔

۲۹۰۔ ایک بیلیجی میں $ل$ اور $ج$ سے $ج$ $ن$ اور $ن$ پر کے ماس پر عمود نکالے گئے ہیں اور وہ ایک دوسرے کو $ح$ پر ملتے ہیں، اگر $ج$ $ح$ کے قطر پر ایک دائرہ بنایا جائے تو وہ $ن$ پر کے ماس کو $ل$ پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ اگر محور اصغر کو قطر مان کر ایک دائرہ

بنایا جائے اور نقطہ ن سے اس دائرہ کا مماس کھینچا جائے تو ج ل اس مماس کے برابر ہو گا۔

[جیسس کالج ۱۸۸۲ء]

۲۹۱۔ ایک بیلیجی کے ایسے ماسوں کا نقطہ تقاطع جو ایک دوسرے سے ناویہ قائمہ بنائیں ایک دائرہ ہوتا ہے۔

[جیسس کالج ۱۸۸۲ء]

اگر ن پر کا مماس اس دائرہ کو ط پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ جو زاوے ط ن کے محاذی بیلیجی کے ماسوں پر بنتے ہیں وہ ایک دوسرے کے متکم ہیں۔

۲۹۲۔ اگر ایک دائرہ بیلیجی کے ماسوں میں سے

کھینچا جائے تو وہ منحنی کو نقاط ن اور ق پر محور کے مقابل کی جانبوں میں قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ ان عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ جو مرکز سے ن اور ق پر کے ماسوں پر نکالے جائیں ا ج کے مربع کے مساوی ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۳ء]

۲۹۳۔ ایک بیلیجی کے ماسوں میں سے س ن اور ح ن پر بالترتیب عمود س و اور ح و نکالے گئے ہیں اور یہ ن پر کے عمود سے و اور و پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ محور اصغر و کی تنصیف کرتا ہے۔

[پیتربوس ۱۸۸۳ء]

ہندولی

۲۹۴۔ ایک ہندولی کے محور $اج$ ، $بج$ بلحاظ مقدار اور مقام کے معلوم ہیں، ہندسی طریق سے ایسے مزدوج قطرون $ن$ $ج$ $ن$ ، $د$ $ج$ $د$ کا ایک زوج دریافت کرو جن کا درمیانی زاویہ ایک دسے ہوئے زاویہ کے برابر ہو۔

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۶]

۲۹۵۔ ایک ہندولی میں ایک مستقیم خط مزدوج قطروں کے ایک زوج کو $ن$ اور د پر کاٹتا ہے اور ایک دوسرے زوج کو $ن$ اور $د$ پر، اگر خط کے اس مقطعہ کا نقطہ تنصیف و ہو جو مقاربوں کے درمیان ہے تو ثابت کرو کہ

$$ون \times دد = ون \times ود$$

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۶]

۲۹۶۔ ایک ہندولی کا ایک ماسک، ایک تماس اور مزدوج محورتینوں معلوم ہیں ثابت کرو کہ مرکز کا طریق ایک مستقیم خط ہے،

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۵]

۲۹۷۔ اگر ایک ہندولی کے دو تماس ایک دوسرے کو

مزدوج ہڈولی کی ایک شاخ پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ
انکا وتر تاس دوسری شاخ کو مس کرتا ہے

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۵ء]

۲۹۸۔ ایک ہڈولی پر کے کسی نقطہ ن سے محور پر
محین ن ل کھینچو، نقطہ ل میں سے ن کے متوازی
خط ل ق کھینچو جو ج ن کو ق پر ملے، ثابت کرو کہ
ل ق، ن پر کے ماس کے متوازی ہے۔

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۶ء]

۲۹۹۔ ایک مثلث مساوی الاضلاع کے دو نقاط پر
بالترتیب ایک ہڈولی کے مرکز اور ماسک ہیں اور مثلث
کا ایک ضلع منحنی کا متعارف ہے، معلوم کرو کہ باقی
دو اضلاع کو منحنی کس جگہ کاٹتا ہے،

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۳ء]

۳۰۰۔ اگر ایک مثلث کے دو اضلاع کی سمتیں دی
ہوئی ہوں اور تیسرا ضلع ایک ثابت نقطہ میں سے
گذرے تو ثابت کرو کہ جو دائرے اس مثلث کے
گرد بن سکیں ان کے مرکزوں کا طریق ایک ہڈولی
ہو گا۔

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۳ء]

۳۰۱۔ ایک قائم ہڈولی کے ایسے وتر کو جس کے
سرے مختلف شاخوں پر واقع ہیں قطر مان کر ایک
دائرہ کھینچا گیا ہے، اگر دائرہ اور ہڈولی کے باقی نقاط

تقاطع سے اس وتر پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ
یہ ہڈولی کے مماس ہیں

[پیتھوگورس ۱۸۸۶ء]

۳۰۲۔ ایک ہڈولی کے ایک مماس اور دو متقاربوں
کے مقام دئے ہوئے ہیں، ہڈولی بنانے کی ترکیب
معلوم کرو۔

[پیتھوگورس ۱۸۸۶ء]

۳۰۳۔ ایک دائرہ اور ایک قائم ہڈولی ایک دوسرے
کو ایسے چار نقطوں پر قطع کرتے ہیں جو سب کے سب
ایک شلجی پر واقع ہوتے ہیں، ثابت کرو کہ ہڈولی کا
ایک محور شلجی کے محور کے متوازی ہے، نیز ثابت
کرو کہ ہڈولی (یا دائرہ) کا مرکز خواہ کوئی سا منحنی مرسم کرے
دائرہ (یا ہڈولی) کا مرکز ایک مساوی منحنی مرسم کرے گا
جبکہ مرکز اپنے جداگانہ منحنیات پر متقابل سمتوں میں
حرکت کریں۔

[پیتھوگورس ۱۸۸۶ء]

۳۰۴۔ ایک شلجی اور ایک قائم ہڈولی جس کا ایک
مقارب شلجی کا محور ہے دونوں ایک مثلث ABC کے
گرد بنائے گئے ہیں اور مثلث کے اضلاع شلجی
کے محور کو AN ، CQ ، BP پر قطع کرتے ہیں، اگر شلجی کا
راس A ہو اور N کا معین N لے، تو ثابت کرو کہ

۱ ق + ۱ ر = ۱ ل

[پتیر ہوس وغیرہ] ^{۱۸۸۸}

۳۰۵۔ تین نقطوں میں سے کسی دو کو ماسکے مان کر ایک ہڈولی کھینچا گیا ہے جو تیسرے نقطہ میں سے گذرتا ہے ثابت کرو کہ تین ہڈولی جو اس طرح سے بنائے جاسکتے ہیں ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں

[ترتیبی کالج] ^{۱۸۸۸}

۳۰۶۔ اگر ایک تراش مخروطی ایک مثلث کے تین راسوں اور اُس کے تین عمودوں کے نقطہ تقاطع میں سے گذرے تو ثابت کرو کہ یہ قائم ہڈولی ہے، اگر ایسے قائم ہڈولی کھینچے جائیں تو ان کے مرکزون کا طریق دریافت کرو

[لندن - بی۔ اے۔ اونرز] ^{۱۸۸۸}

۳۰۷۔ ایک ہڈولی پر دو نقطے 'ن'، 'ق' لئے گئے ہیں، 'ن' پر کا ماس اُس خط کو جو 'ق' میں سے ایک متعارف کے متوازی کھینچا گیا ہے ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتا ہے جو دوسرے متعارف پر واقع ہے، ثابت کرو کہ 'ق' پر کا ماس، 'ن' میں سے گذرنے والے خط کو جو دوسرے متعارف کے متوازی ہو پہلے متعارف پر قطع کرتا ہے

[ترتیبی کالج] ^{۱۸۸۸}

۳۰۸۔ ایک ہڈولی کا غذ پر بنا کر دیدیا گیا ہے، اس کے

مستقارب، مزدوج محور اور قاطع محور دریافت کرو۔

[ترتیبی مال ۱۸۸۸ء]

۳۰۹۔ ایک ہڈولی کے مستقارب دئے ہوئے ہیں اور منحنی پر کا ایک نقطہ معلوم ہے، ماسکے، مرتبات اور راسین دریافت کرو۔

[سی، سی، سی ۱۸۸۸ء]

۳۱۰۔ ایک قائم ہڈولی کا مرکز ج ہے، ایک مستقیم خط ل ق ایک مستقارب ج م کے متوازی کھینچا گیا ہے جو دوسرے مستقارب کو ل پر ملتا ہے، زاویہ ق ج م کی تنصیف ایک ایسے خط سے کی گئی ہے جو ہڈولی کو ن پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ج ق مناسب ہے ج ن کے، اس میں ق خط ل ق پر کا کوئی نقطہ ہے [تکثیری کالج ۱۸۸۸ء]

۳۱۱۔ ایک قائم ہڈولی کے ماسکوں سے کسی نقطہ ن پر کے ماس پر عمود کھینچے گئے ہیں جو منحنی کو نقاط گ، ل، م، ف پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ل م ن ایک ایسا متوازی الاضلاع ہے جس کے دو اضلاع ن میں سے گزرنے والے قطر کے ساتھ زاوئے قائمے بناتے ہیں [جیسس وغیرہ ۱۸۸۸ء]

۳۱۲۔ ایک ہڈولی پر کے تین نقطے اور ایک مستقارب معلوم ہیں دو سر مستقارب کھینچو۔

۳۱۳- ایک ہڈولی پر کوئی نقطہ N ہے اور اس کا قاطع محور AO ہے اگر ON اور AN ایک مربع کوع AO N پر ملیں تو ثابت کرو کہ ON کے معادی اسکے قطبی ماسکہ پر ایک زاویہ قائمہ بنتا ہے

[جون کالج ۱۸۸۸ء]

۳۱۴- ایک مربع کے دو اضلاع کو متقارب اور متقابل کے کونے کو ماسکہ مان کر ایک ہڈولی بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ یہ باقی اضلاع کی تنصیف کرتا ہے

[جون کالج ۱۸۸۸ء]

۳۱۵- ایک ایسا بیلیبی بنایا گیا ہے جس کے محور، اعظم اور اصغر دونوں ایک ہڈولی کے محوروں پر مقدار اور سمت میں منطبق ہوتے ہیں، کسی متقارب کے ایک نقطہ P سے بیلیبی کے مماس PT ، PT کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ PT کا بیرونی دائرہ (گرد بنا ہوا دائرہ) ہڈولی کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

[کلیر کالج ۱۸۸۹ء]

۳۱۶- $ABCD$ ایک مستطیل ہے دو ایسے قائم ہڈولی بنائے گئے ہیں جن کے متقارب مستطیل کے اضلاع کے متوازی ہیں اور جو بالترتیب نقاط A ، B ، C اور D میں سے گذرتے ہیں، ثابت کرو کہ ان ہڈولی خطوں کے مرکزون کے قطبی بلحاظ ایک دوسرے کے

ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔

[ترنتی کالج سٹڈ]۸۸۶

۳۱۷۔ ایک مثلث ا ب ج کی سطح میں ن ایک ایسا نقطہ ہے کہ اگر ا ب ج سے بالترتیب ن ب، ن ج، ن ا پر عمود نکالے جائیں تو وہ ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک ہندولی ہے جو مثلث ا ب ج کے گرد بن سکتا ہے اور اگر ا ب ج سے مقابل کے اضلاع پر عمود نکالے جائیں اور یہ عمود ان مستقیم خطوں کو جو نقاط ب، ج، ا میں سے گزریں اور بالترتیب ب ا، ج ب، ا ج پر عمود ہوں تین نقطوں پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ ہندولی مذکور ان نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

[ترنتی کالج سٹڈ]۸۸۶

۳۱۸۔ دو مزدوج ہندولی دے ہوئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے متوازی ماسکی وٹروں کو ایک دوسرے سے وہی نسبت ہے جو ہندولی خطوں کے خروج المرکزوں کو آپس میں ہے۔

[ترنتی کالج سٹڈ]۸۸۶

۳۱۹۔ ہندولی کے ماسکے میں سے ایک مستقیم خط گذرتا ہے اور ماس سے ایک مستقل زاویہ بناتا ہے، ماس اور اس مستقیم خط کے تقاطع کا طریق دریافت کرو۔

[ترنتی کالج سٹڈ]۸۸۶

۳۲۰۔ ایک ہڈولی شاخ کا راس A ہے اور اس شاخ پر ایک نقطہ N لیا گیا ہے، نقطہ N پر کاماس L ن ل متقاربوں کو L پر کاٹتا ہے، ہڈولی کے دوسرے راس میں سے متقاربوں کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں اور ایک مستقیم خط M ن A م ان خطوں کو M اور M پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ L م اور L م متوازی ہیں۔
[بوڈن کالج ۱۹۸۱ء]

۳۲۱۔ ایک قائم ہڈولی پر دو نقطے N اور Q ہیں، محوروں کا تقاطع J ہے N پر کاماس N ط ہے اور نقطہ Q سے J ن اور N ط پر عمود Q م اور Q ل بالترتیب نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ J م اور J ل مساوی ہیں۔

[بوڈن کالج ۱۹۸۱ء]

۳۲۲۔ اگر N پر کاماس متقاربوں کو L اور M پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ اس دائرے کے مرکز کا طریق جو مثلث L ج M کے گرد بن سکے ایک ہڈولی ہے جس کے متقارب پہلے متقاربوں سے زاوے قائمے بناتے ہیں۔
[کوین کالج ۱۹۸۱ء]

۳۲۳۔ ولا اور و ما دو ثابت مستقیم خط ہیں، A خط ولا پر واقع ہے اور B ، و ما پر اور O = و ب نقاط A اور B میں سے کوئی دو متوازی خط A م، B ل

کھینچے گئے ہیں جو و ما اور ولا کو بالترتیب م اور ل پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ م ل کے نقطہ تنصیف کا طریق ایک ہندولی ہے۔

[کیترین کالج ۱۸۸۷ء]

۳۲۴۔ ایک دائرہ دو ثابت نقطوں سے اور سے میں سے گزرتا ہے اور دو ثابت مستقیم خطوں کو جو سے سے پر عمود ہیں اور اس کے نقطہ تنصیف سے منساوی الفاصل ہیں نقاط ن، ق اور ن، ق پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ اگر ن، ن، سے سے کے متوازی نہ ہو تو یہ ایک ایسی تراش مخروطی کو مس کرے گا جس کے ماسکے سے اور سے ہیں۔

[جیس کالج ۱۸۸۷ء]

۳۲۵۔ ایک ثابت مخروطی تراش پر دو ثابت نقطے ن، ق ہیں ایک قائم ہندولی ان نقطوں میں سے گزرتا ہے اور اس ہندولی کا ایک متقارب ایک دیا ہوا مستقیم خط ہے، اگر ہندولی مخروطی تراش کو ر اور سے پر بھی قطع کرے تو ثابت کرو کہ مستقیم خط ن، ر اور ق سے ایک دوسرے کو ایک ثابت مخروطی تراش پر قطع کریں گے۔

[جیس کالج ۱۸۸۷ء]

۳۲۶۔ ولا اور و ما دو ثابت مستقیم خط ہیں، ولا پر ایک ثابت نقطہ ہے اور و ما پر ایک متغیر نقطہ ن ہے، الا پر عمود ن م نکالا گیا ہے اور ن م پر ایک

ایسا نقطہ ق کیا گیا ہے کہ $اق = ن م$ ، ق کا طریق دریافت کرو۔

[جیس کا لکچر ۱۸۸۷ء]

۳۲۷۔ ایک دائرہ پر جس کا قطر ایک ثابت خط $اب$ ہے ایک نقطہ $ن$ ہے۔ $ب$ میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے۔ جو کہ $ن$ ا محدودہ کو ق پر ملتا ہے۔ اگر $ب ن$ او $ب ق$ ، $اب$ سے مساوی زاوے بنائیں تو ق کا طریق دریافت کرو۔

۳۲۸۔ اگر ایک قائم بذلولی کے اندر ایک مثلث $اب$ بنایا جائے تو ثابت کرو کہ اس کا عمودی مرکز $ع$ بذلولی پر واقع ہوتا ہے اگر $ع$ میں سے خطوط $اع$ ، $بع$ ، $ج$ ج مثلث کے اضلاع کے متوازی کھینچے جائیں ثابت کرو کہ $ا$ ، $ب$ ، $ج$ متوازی ہیں۔

[جون کا لکچر ۱۸۸۶ء]

۳۲۹۔ ایک قائم بذلولی کے متقابل شاخوں پر $ا$ ، $ج$ دو نقطے ہیں $ج$ کو قطمان کر ایک دائرہ کھینچا گیا۔ جو مسخنی کو دوبارہ $ب$ اور $د$ پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ $ب$ یا $ج$ پر کے کسی نقطہ کے فاصلے دو اربعۃ الاضلاع کے ضلعوں سے باہم متناسب ہیں۔

[جون کا لکچر ۱۸۸۶ء]

۳۳۰۔ ایک مثلث کے قاعدہ $ا$ کا مقام دیا ہوا۔

اور اس کا طول مستقل ہے، اگر قاعدہ کے متصل زاویوں کا فرق ایک قائمہ کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ اس کے اس کا طریق ایک قائم ہڈولی ہے، Δ پر عمود $ن$ ل نکالا گیا ہے، نقطہ $ل$ سے دو ماس $ل ق$ ، $ل ق$ اُس دائرہ کے کھینچے گئے ہیں جو Δ کے قطر پر بنایا جائے، ثابت کرو کہ $ن ق$ ، Δ میں سے گزرتا ہے اور $ن ق$ ، Δ میں سے نیز اگر $ق ق$ ، Δ کو $م$ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ $ن م$ نقطہ $ن$ پر کا ماس ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۷ء]

۳۳۱۔ ایک قبیل کے قائم ہڈولی ایک مثلث کے گرد بنائے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان سب کے مرکز نو نقطی دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں۔

اگر اس مثلث کا ایک زاویہ قائمہ ہو تو سب ہڈولی خطوں کا قائمہ الزاویہ پر ایک مشترک ماس ہوگا۔

[پتر ہوس ۱۸۸۶ء]

۳۳۲۔ ہم ماسکہ ہیلیجی خطوں کا ایک نظام دیا ہوا ہے ان پر ایسے نقطے لئے گئے ہیں جن پر کے ماس ایک دئے ہوئے خط کے متوازی ہیں اس کو ہندسی طریق پر ثابت کرو کہ ان نقطوں کا طریق ایک قائم ہڈولی ہے۔

[کلیر کالج ۱۸۸۶ء]

۳۳۳۔ ایک ہیلیجی کے مزدوج قطر $ن ج$ ، $د ج$ د

ایک ہڈولی کے متقارب ہیں، ق قی انکا مشترک وتر ہے اور ہیلیجی کے وتر قی ر، قی ر بالترتیب ج د اور ج ن کے متوازی ہیں، ثابت کرو کہ

$$قی ر : قی ر = ج د : ج ن$$

[کلیر کا لچ ۱۸۸۶]

۳۳۴۔ ثابت کرو کہ ایک ہڈولی اور ایک دائرہ کے مشترک وٹروں کے ایسے زوج بن سکتے ہیں جو متقاربوں کو ہم محیط نقطوں پر قطع کریں، نیز ثابت کرو کہ ان دائروں کا مرکز وہی ہے جو اصلی دائرہ کا ہے،

[ترنی کا لچ ۱۸۸۶]

۳۳۵۔ ایک مثلث کا قاعدہ دیا ہوا ہے اور قاعدہ کے متصل زاویوں کا فرق بھی معلوم ہے، ثابت کرو کہ راس کا طریق ایک قائم ہڈولی ہے، معلوم کرو کہ مثلث کا قاعدہ کس صورت میں قاطع محور ہوگا

[کیز کا لچ ۱۸۸۵]

۳۳۶۔ دو قائم ہڈولی خطوں کا مرکز ایک ہی ہے اور ان کا ایک مشترک مماس ہے، ثابت کرو کہ اسے قاطع محوروں کا درمیانی زاویہ ان مستقیم خطوں کے درمیانی زاویہ کا نصف ہے جو مرکز کو انقاط تماس سے وصل کرتے ہیں۔

[ترنی ہال ۱۸۸۶]

۳۳۷۔ اگر ایک ہیلیجی کے دو متقارب بلحاظ مقام کے معلوم ہوں اور سخنی پر کا ایک نقطہ بھی دیا ہوا ہو تو اس کے راسوں کا مقام دریافت کرو۔

[ترنٹی بال ۱۸۸۶ء]

۳۳۸۔ ایک ہڈولی کے چار ماس گھنجنے سے ایک مستطیل کی شکل بنائی گئی ہے، اگر مستطیل کا ایک ضلع ۱ ب ہڈولی کے مرتب کو لا پر قطع کرے اور نظیری ماس کے س ہو تو ثابت کرو کہ مثلث لا س ۱، لا س ب متساویہ ہیں۔

[کرائسٹ کا پ ۱۸۸۵ء]

۳۳۹۔ ثابت کرو کہ ایک قائم ہڈولی میں وترن ق اور ن پر کے ماس کا درمیانی زاویہ اس زاویہ کے برابر ہے جو وترن ق کے محاذی ن میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے پر بنتا ہے۔

۳۴۰۔ دو قائم ہڈولی ایک دوسرے کو ن پر ماس کرتے ہیں اور ر اور س پر قطع کرتے ہیں، اگر ر س کے قطر پر ایک دائرہ بنایا جائے تو ثابت کرو کہ یہ ن میں سے اور ن میں سے گزرنے والے دو قطر ویکے سروں میں سے گزرتا ہے۔

[کرائسٹ کا پ ۱۸۸۵ء]

۳۴۱۔ اگر ایک قائم ہڈولی کے اند ایک مثلث

متساوی الاضلاع بنایا جائے تو اس کے بیرونی دائرہ کے مرکز کا طریق دریافت کرو۔

[جون کالج ۱۸۸۶ء]

۳۴۲۔ ثابت کرو کہ ایک قائم بذلولی میں کسی نقطہ پر کے عمود کا وہ حصہ جو اس نقطہ اور محور کے درمیان واقع ہے مزدوج بذلولی کے اُس نیم قطر کے برابر ہے جو عمود پر عمود ہو۔

[جون کالج ۱۸۹۱ء]

۳۴۳۔ دو ثابت نقطوں اور ب میں سے ایسے شلجی خط کھینچے گئے ہیں جن کے محور ایک دئے ہوئے مستقیم خط کے متوازی ہیں، اگر ایک ایسا مماس کھینچا جائے جو اب پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ اس کے نقطہ مماس کا طریق ایک بذلولی ہے۔

[جون کالج ۱۸۹۱ء]

۳۴۴۔ دو مستقیم خط ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں ایک اور مستقیم خط ان پر ایسے حرکت کرتا ہے کہ اس کے محاذی ایک ثابت نقطہ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے، یہ ثابت نقطہ خطوط مذکورہ کے درمیانی زاویہ قائمہ کے منصف پر واقع ہے، ثابت کرو کہ متحرک خط ایک قائم بذلولی کو مس کرتا ہے۔

[جون کالج ۱۸۹۱ء]

۳۴۵۔ ایک شلیجی دیا ہوا ہے، ثابت کرو کہ ایک ہم ماسکہ قائم بذلولی اس کو مساوی و مزدوج قطروں کے سروں پر قطع کرتا ہے

[پتر ہوس ۱۸۶۱]

۳۴۶۔ ایک شلیجی کے نقطہ ن پر کاماس راس پر کے ماس کو ما پر ملتا ہے، معین ن ل نقطہ ر تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ رل = ن ما، ثابت کرو کہ ر کا طریق ایک قائم بذلولی ہے۔

[جیس کلچ ۱۸۸۲]

۳۴۷۔ ایک دے ہوئے دائرہ پر دو ثابت نقطے ۱ اور ب ہیں اور ج د ایک وتر ہے جسکا طول دیا ہوا ہے اگر ا ب کے متوازی ایک وتر ج ع کھینچا جائے اور اگر ا ع اور ب د ایک دوسرے کو و پر ملیں تو ثابت کرو کہ و کا طریق ایک قائم بذلولی ہے۔

[جیس کلچ ۱۸۸۲]

۳۴۸۔ ایک بذلولی کا امدادی دائرہ دیا ہوا ہے، نیز منحنی پر کا ایک نقطہ معلوم ہے، ثابت کرو کہ ماسکوں کا طریق ایک بذلولی ہے۔

۳۴۹۔ دو مساوی دائرے دو مستقیم متوازی خطوں کو دئے ہوئے نقاط ۱ اور ب پر منسل کرتے ہیں، ان دائروں کے مرکز ا ب کی ایک ہی جانب میں واقع ہیں

ثابت کرو کہ دائروں کے تقاطع کا طریق ایک ہڈولی ہے۔

[جیس کا پ ۱۸۸۶]

۳۵۰۔ ثابت کرو کہ ایک قائم ہڈولی کے دو ماسوں کا درمیانی زاویہ اس زاویہ کے مساوی ہے (یا اس زاویہ کا مکمل ہے) جو وتر تماس کے محاذی مرکز پر بنتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ان زاویوں کے منصف ایک دوسرے کو وتر تماس پر ملتے ہیں۔

[جیس کا پ ۱۸۸۶]

۳۵۱۔ ایک قائم ہڈولی کے نقطہ ن پر کا تماس متقابل کوک اور ل پر قطع کرتا ہے اور ن پر کا عماد محور کوک پر ملتا ہے، جو دائرہ ذواربۃ الاضلاع ج ک گ ل کے گرد بنایا جائے اس کا مرکز دریافت کرو۔

[جون کا پ ۱۸۸۵]

۳۵۲۔ دو ہڈولی خطوں کا ایک ہی قاطع محور ہے، اس پر ایک عمود قائم کیا گیا ہے جو منحنیات کو ن اور ن پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن اور ن پر کے تماس ایک دوسرے کو قاطع محور پر ملتے ہیں۔

[پتر ہوس ۱۸۸۴]

۳۵۳۔ ایک ہڈولی کے نقطہ ن پر کا تماس ایک متقارب کو ط پر ملتا ہے، اس متقارب کے متوازی ایک خط ر ن رکھینچا گیا ہے جو ایک مرتب کو ر پر

اور خط $س ط$ کو ر پر ملتا ہے، اس میں $س$ مرتب
مذکور کا متعلقہ ماسکہ ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ر ن = ر س = س ن$$

[کلیر کا پ ۱۸۸۵]

۳۵۴۔ ایک بذلولی کے نقطہ $ن$ پر کا $ماس$ ایک متقارب
کو $ط$ پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ $ج ط$ اور $س ن$ کا درمیانی
زاویہ، زاویہ $س ط ن$ کا دو چندان ہے، اس میں $ج$ مرکز
ہے اور $س$ ، $س$ منحنی کے ماسکے ہیں۔

[ترتی کا پ ۱۸۸۴]

۳۵۵۔ ایک بذلولی کے ماسکے $س$ ، $س$ ہیں، اگر
 $ج ن$ 'ج' $د$ اس کے مزدوج نیم قطر ہوں تو ثابت کرو کہ
 $د$ کا فاصلہ ایک ایسے خط سے جو $ج$ میں سے $س ن$
کے متوازی کھینچا جائے نصف محور اصغر کے مساوی ہے۔

[ترتی کا پ ۱۸۸۵]

۳۵۶۔ ایک بذلولی کے نقطہ $ن$ پر کا $ماس$ متقاربوں
سے $ق$ ، $ق$ پر ملتا ہے، $ق م$ ، $ق م$ بالترتیب نقاط $ق$
اور $ق$ کے معین ہیں اور مرکز سے $ن$ پر کے $ماس$ پر
عمود $ج ط$ کھینچا گیا ہے اگر $ط م$ ، $ط م$ نقطہ $ن$ پر کے
عماد کو بالترتیب $ک$ اور $ل$ پر ملیں تو ثابت کرو کہ
 $ق ک$ $ق ل$ ایک معین شکل ہے۔

[پیرک کا پ ۱۸۸۵]

۲۔ اگر ہڈلولی کی یہ تعریف کی جائے کہ یہ ایک ایسے انکساف ہے جو دو ثابت خطوں سے ایک مثلث ہے جس کا رقبہ مستقل ہے تو ثابت کرو کہ ہڈلولی کے قارب ہیں اور خط مذکور سخنی کو اس کے نقطہ تنصیف کرتا ہے۔

[جی اور سی ۱۸۸۵ء]

۱۔ اگر دو ہم مرکز قائم ہڈلولی خطوں کے نقطہ تقاطع پر کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کا درمیانی زاویہ محروں کے درمیانی زاویہ کا دو چند ہے

[ترنی ہال ۱۸۸۵ء]

۲۔ فرض کرو کہ Q ایک قائم ہڈلولی کا قطر ہے N کو مرکز اور Q کو نصف قطمان کر ایک دائرہ کیا ہے، اگر دائرہ اور ہڈلولی کے باقی نقاط تقاطع B ہوں تو مثلث ABQ متساوی الاضلاع ہے

[ک ۱۵۸۲ء]

۲۔ ایک دائرہ ایک قائم ہڈلولی کو A ، A' ، N ، N' ہے، N ، N' پر ہڈلولی کے مماس کھینچے گئے ہیں۔ اگر وہ ان کا نقطہ تقاطع ہڈلولی کے اُس قطر پر واقع جو A ، A' پر عمود ہے۔

[کرائسٹ کا ۱۸۸۵ء]

۱۔ ایک شلجی کا ماسک S ہے اور راس A ، S ۔

مرتب کو لا پر ملتا ہے، س لا ح ایک ۹۰ کا زاویہ ہے اور س ح، س لا پر عمود ہے، ثابت کرو کہ س اور ح کو ماسکے مان کر ایک ہڈلولی کھینچ سکتا ہے جو شلجمی کو نقطہ ن پر مس کرتا ہے اور ن کا ماسکی فاصلہ نیم وتر خاص کے برابر ہے۔

[کوین کالج ۱۸۸۵ء]

۳۶۲۔ ایک دے ہوئے نقطہ ن میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو دو ثابت مستقیم خطوں کو ن اور ق پر ملتا ہے، ن ن ق پر ایک ایسا نقطہ ق لیا گیا ہے کہ

$$ق ق = ن ن$$

ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک ہڈلولی ہے

[کیتھرین کالج ۱۸۸۵ء]

۳۶۳۔ ثابت کرو کہ ایک ہڈلولی کے کسی نقطہ پر کے مماس اور عماد متقاربوں اور محوروں کو بالترتیب چار نقطوں پر قطع کرتے ہیں جو ہڈلولی کے مرکز میں سے گزرنے والے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں، نیز ثابت کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر بالعکس متناسب ہے اس عمود کے جو مرکز سے مماس پر نکالا جائے۔

[جون کالج ۱۸۸۳ء]

۳۶۴۔ ایک ہڈلولی کے متقارب ایک دو سرے سے نصف زاویہ قائمہ بناتے ہیں، نقطہ ن میں سے

ہر ایک متقارب کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں جو دوسرے متقارب کو بالترتیب ح اور ک پر ملتے ہیں، مثلث ج ح ک کے عمودی مرکز کا طریق دریافت کرو (اور اسکو مرتسم کرو)

[پہرہ س ۱۸۸۳]

۳۶۵۔ ایک نقطہ ل پر کا ماس ایک متقارب کو ط پر ملتا ہے، دو وتر جو نقطہ ل کو دو اور نقطوں م اور ن کے ساتھ ملاتے ہیں وہ اس متقارب سے ل اور و پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ط ل = ل و جہاں ل وہ نقطہ ہے جہاں م ن متقارب سے ملتا ہے

[طیر کالج ۱۸۸۳]

۳۶۶۔ ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے، ب ج پر ایک نقطہ ع لیا گیا ہے اور اس نقطہ سے ا د پر عمود ع ف نکالا گیا ہے، ا ع پر عمود ع گ قائم کیا گیا ہے۔ جہاں نقاط ف اور گ خط ا د پر واقع ہیں، ا ب پر ایک نقطہ ک ایسا لیا گیا ہے کہ ا ک = ف گ، ثابت کرو کہ ف ک ہمیشہ ایک ثابت بذلولی کو مس کرتا ہے

[ترنی کالج ۱۸۸۳]

۳۶۷۔ ایک بذلولی پر کے کسی نقطہ ن سے متقاربوں پر عمود ن م اور ن ل نکالے گئے ہیں، ن ل منحنی

گو دوبارہ N پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ N م اور N ل کی باہمی نسبت N کے سب مقامات کے لئے وہی ہے۔
[پہرک کا پج ۱۸۸۴]

۳۶۸۔ دائروں کا ایک نظام دیا ہوا ہے، سب کے سب دائرے دو ثابت نقطوں میں سے گزرتے ہیں اور ان دائروں کے متوازی تماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقاط تماس کا طریق ایک قائم ہڈولی ہے۔

[کرائسٹ کا پج ۱۸۸۴]

۳۶۹۔ نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ایک ہڈولی پر واقع ہیں، 'ا' ب اور ج 'د' ایک دوسرے کو ایک متقارب پر قطع کرتے ہیں، دوسرا متقارب دریافت کرو۔

[پتر ہوس ۱۸۸۴]

۳۷۰۔ ایک قائم ہڈولی کے قاطع محور پر ایک نقطہ ط ہے، اس نقطہ سے ہڈولی کے تماس کھینچے گئے ہیں جو راسوں پر کے تماسات سے ق اور قی پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ق قی اندامی دائرہ کو ایسے نقطہ ر پر مس کرتا ہے کہ اگر ر اور ط کو ایک مستقیم خط کے ذریعہ ملا یا جائے تو یہ خط زاویہ ق ق ط کی تنصیف کرے گا۔

[خرنقی کا پج ۱۸۸۵]

۳۷۱۔ ایک مثلث ا ب ج کے گرد ایک دائرہ بنایا گیا ہے اور اس کے نقطہ ج پر تماس کھینچا گیا ہے، مثلث کے ضلع ا ج

کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو اب اور ماس نکرو کو بالترتیب نقاط ن اور ق پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ج ن ' ب ق کے تقاطع کا طریق ایک قائم ہڈولی ہے۔
[بیسس کالج ۱۸۸۳ء]

۳۷۲۔ ایک ہڈولی پر کے دو نقاط معلوم ہیں اور اس کا ایک متقارب دیا ہوا ہے، ثابت کرو کہ اس کے محور کا لغاف ایک شامجی ہے۔
[بیسس کالج ۱۸۸۳ء]

۳۷۳۔ ایک ثابت نقطہ میں سے ایک ہڈولی کے وتر کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقاط تنصیف کا طریق ایک ایسا شامجی ہے جو اصلی ہڈولی یا اس کے مزدوج کے متشابہ ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۳ء]

۳۷۴۔ ایک مستوی کھیت کے ایک مقام پر ایک بندوق کی آواز اور نشانہ کے چاند پر گولی لگنے کا دھماکہ دونوں ایک ہی وقت سنائی دئے، سننے والے کے مقام کا طریق دریافت کرو۔

[جون کالج ۱۸۸۳ء]

۳۷۵۔ ایک قائم ہڈولی میں اگر ن ق ایک وتر ہو اور ن ق کا مزدوج وتر ج ص ہو تو ثابت کرو کہ ن ق اور ن پر کے ماس کا درمیانی زاویہ، زاویہ ص ج ن کے برابر ہے

[سلون کالج ۱۸۸۳ء]

۳۷۶۔ ایک مزدوج ہڈولی پر ایک نقطہ ک ہے، اس نقطہ سے ایک خط ک ق ن ق م کھینچا گیا ہے جو ہڈولی

کون، ن، پر اور متقاربوں کو ق، ق، پر ملتا ہے ثابت کرو کہ
 $ک ن \times ک ن = ۲ ک ق \times ک ق$

[پتر ہوس ۱۸۸۳ء]

۳۷۷۔ ایک ہڈولی پر دو نقطے ن اور ق لئے گئے ہیں،
 ن میں سے ایک خط ایک متقارب کے متوازی کھینچا گیا ہے
 اور ق میں سے ایک اور خط دوسرے متقارب کے متوازی
 کھینچا گیا ہے اور یہ دونوں خط ایک دوسرے کو ط پر ملتے ہیں۔
 ن اور ق پر کے تماس طاق اور طن کو بالترتیب ن، ق، پر
 ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ن، ق، کے متوازی ہے

[پتر ہوس ۱۸۸۳ء]

۳۷۸۔ ایک ہڈولی کے ماسکے س، س، ہیں نظیری
 مرتب خط س س کو بالترتیب لا اور لا پر ملتے ہیں،
 ایک تماس پر عمود س س اور س س مآ کھینچے گئے ہیں،
 اگر لا مآ اور لا مآ امدادی دائرہ کو دوبارہ لا اور لا پر
 ملیں تو ثابت کرو کہ لا مآ ہڈولی کا تماس ہے۔

[پتر ہوس ۱۸۸۳ء]

۳۷۹۔ ایک قائم ہڈولی کے دو وتر دئے ہوئے ہیں ان میں
 سے ہر ایک کے نقطہ تنصیف میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے
 جو دوسرے وتر کے متوازی ہے، ثابت کرو کہ انکا نقطہ تقاطع،
 مرکز اور وتر کے نقاط تنصیف ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہیں

[کلیبر کالج ۱۸۸۳ء]

۳۸۰۔ ایک مثلث ایک ہڈ لولی کے اندر بنایا گیا ہے اسکے دو راسوں میں سے دو خط متقابلوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو مقابل کے اضلاع کو دو نقطوں پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ جو خط ان نقطوں کو وصل کرتا ہے وہ اُس ماس کے متوازی ہے جو تیسرے نقطہ راس پر کھینچا جائے۔

[کلیئر کا ج ۱۸۸۳]

۳۸۱۔ اگر ایک قائم ہڈ لولی کے قطر ن ج ن کا معین ق ق ہو تو ثابت کرو کہ ق ق نقطہ ق پر اُس دائرہ کا ماس ہے جو مثلث ن ق ن کے گرد بنایا جائے۔

[ترنی مال ۱۸۸۳]

مخروطی تراشین بالعموم

۳۸۲۔ ایک مخروطی تراش کا ماس اسکے دو مرتبوں کو نقطہ ل اور م پر قطع کرتا ہے، ان مرتبوں کے متعلقہ ماس کے بالترتیب س اور ح ہیں، اگر ل س اور م ح (محدودہ بشرط ضرورت) کا تقاطع ع ہو تو ثابت کرو کہ ل ع = م ع

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۵]

۳۸۳۔ ایک مخروطی تراش کا ماسکہ معلوم ہے اور اس پر کے دو نقطے دیئے ہوئے ہیں، ثابت کرو کہ مرتب کے پائین کا طریق ایک دائرہ ہے۔

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۴]

۳۸۴۔ ایک مرکز دار تراش میں فرض کرو کہ N پر کا ماس اور عماد بالترتیب N ک اور N ل ہیں اور فرض کرو کہ K س ل، S ن کے متوازی کھینچا گیا ہے جہاں S اور S ماسکے ہیں، ثابت کرو کہ K س = S ل

[پتر ہوس ۱۸۸۷ء]

۳۸۵۔ N پر کا ماس محور اعظم کو ط پر ملتا ہے، تراش کے ماسکوں سے ایک ماس پر عمود نکالے گئے ہیں اور ان عمودوں کے پایوں سے دوبارہ تراش کے محور پر عمود نکالے گئے ہیں اور وہ منحنی کو L اور L پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ PL ایک مستقیم خط ہے

[کلیئر کا ج ۱۸۸۸ء]

۳۸۶۔ دو ثابت مستقیم خط ایک متحرک مستقیم خط سے ایک ایسا حصہ کاٹتے ہیں جس کے محاذی ایک ثابت نقطہ پر ایک مستقل زاویہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ متحرک خط ایک مخروطی تراش کو مس کرتا ہے جس کا ماسک وہ ثابت نقطہ ہے۔

[ترنٹی کا ج ۱۸۸۸ء]

۳۸۷۔ ایک مرکز دار مخروطی تراش کے کسی قطر پر دو نقطے A اور B ہیں، نیز مزدوج قطر پر دو نقطے C اور D ہیں، اگر AC کا قطب B پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ AD کا قطب B ج پر واقع ہوگا۔

[لندن بی۔ اے۔ اور نرس ۱۸۷۷ء]

۳۸۸۔ اگر دو مثلث ایک مخروطی تراش کے گرد بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے گرد ایک اور مخروطی تراش بن سکتی ہے۔

۳۸۹۔ اگر دائروں کی کوئی تعداد ایک مخروطی تراش کو ایک ہی نقطہ پر مس کرے تو ثابت کرو کہ نقاط تقاطع کو ملانے والے وتر سب متوازی ہونگے۔

[لندن ایم۔ بی۔ اے اور ۱۸۸۲ء]

۳۹۰۔ مخروطی تراشوں کے ایک سلسلہ کا ایک ماسکہ اور ایک مرتب مشترک ہیں، ایک مستقیم خط کھینچا گیا ہے جو مرتب پر عمود ہے اور مخروطی تراشوں کو 'ن'، 'ق'، 'ر' پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ اگر مشترک ماسکہ سے 'ن'، 'ق'، 'ر' پر کے ماسوں پر عمود نکالے جائیں تو ان کے پائے ایک ایسے مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں جو مرتب کے پائین میں سے گزرتا ہے۔

[جیس کاچ ۱۸۸۵ء]

۳۹۱۔ ایک ملیجی ایک مثلث متساوی الساقین کے اندر بنایا گیا ہے، ملیجی کا محور اعظم مثلث کے قاعدہ کے متوازی ہے، ثابت کرو کہ محور اعظم کے کسی ایک سرے کا طریق ایک ایسا شلجی ہے جس کا راس اُس عمود کا نقطہ تنصیف ہے جو مثلث کے راس سے قاعدہ پر نکالا جائے۔

[جیس کاچ ۱۸۸۵ء]

۳۹۲۔ دو مخروطی تراشوں کا ایک ماسکہ اور ایک مرتب دونوں

مشترک ہیں، نقطہ ن ایک تراش پر واقع ہے اور ق دوسری پر اور زاویہ ن س ق ایک مستقل زاویہ عم کے برابر ہے۔ ثابت کرو ن اور ق پر کے تماس ایک دوسرے کو ایک ایسی تراش پر قطع کرتے ہیں جس کا ماسکہ اور مرتب دونوں وہی ہیں جن کا اوپر ذکر ہوا۔

[جون کالج ۱۸۸۷ء]

۳۹۳۔ جو خط ایک تراش پر کے نقطہ ن کو ماسکوں کے ساتھ ملاتے ہیں وہ منحنی کو دوبارہ ق اور ر پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ ق ر ایک ہم مرکز اور ہم محور مخروطی تراش کو مس کرتی ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۷ء]

۳۹۴۔ ایک مخروطی تراش پر ایک متحرک نقطہ ن ہے اور ن پر کا تماس ایک ثابت تماس کو ق پر قطع کرتا ہے، ماسکہ س سے ایک مستقیم خط کھینچا گیا ہے جو س ق پر عمود ہے اور جون پر کے تماس کو ر پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ر کا طریق ایک مستقیم خط ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۷ء]

۳۹۵۔ ایک مخروطی تراش کے نقطہ ن پر کا تماس قاطع محور کو ط پر ملتا ہے، تراش کا ماسکہ س ہے، ثابت کرو کہ تراش بیلیجی، شلجی یا ہڈولی ہوگی اگر بالترتیب س ط بڑا ہو، مساوی ہو یا چھوٹا ہو ن س سے

[ترقی کالج ۱۸۸۷ء]

۳۹۶۔ ایک دی ہوئی مخروطی تراش کا مرکز ج ہے اور و ایک دیا ہوا نقطہ ہے، ج و تراش کو ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتا ہے جو ج اور و کے درمیان واقع ہے، ایک مستقیم خط و ن ر ق مخروطی تراش کو ن اور ق پر ملتا ہے اور ج و کے مزدوج قطر کو ایک نقطہ پر ملتا ہے جو ن اور ق کے درمیان واقع ہے، ثابت کرو کہ

$$\frac{رن}{ن و} + \frac{رق}{ق و} \text{ خط و ن ر ق کی سمت پر}$$

منحصر نہیں ہے۔
۳۹۷۔ ایک مخروطی تراش کا ماسکہ س اور ایک ماسکی وترن س ق دونوں دئے ہوئے ہیں، اگر ن پیر کا عماد محور کو گ پر لے تو گ کا طریق دریافت کرو

[پیرک کالج ۱۸۸۶ء]

۳۹۸۔ ایک مخروطی تراش اسطرح گھینی گئی ہے کہ وہ ایک نقطہ معلومہ ن میں سے گزرتی ہے اور اس نقطہ پر اس کا ایک ثابت مماس ن ط ہے، محور اعظم ایک ثابت خط ن ی پر عمود ہے اور اس کا طول ایک دئے ہوئے خط کے برابر ہے ثابت کرو کہ تراش کا مرکز ایک ہڈولی پر واقع ہے جس کے متقارب ن ی اور ن ط ہیں۔

۳۹۹۔ ایک مخروطی تراش پر کوئی نقطہ N ہے،
مرتب پر عمود N ک نکالا گیا ہے، اگر k N کو اتنا
خارج کیا جائے کہ NQ ، N کے ماسکی فاصلہ کے
مساوی ہو تو ثابت کرو کہ Q کا طریق ایک مخروطی
تراش ہے۔

[کیٹھن کالج ۱۸۸۷ء]

۴۰۰۔ دو مخروطی تراشوں کے نقاط تقاطع میں سے
کم از کم دو نقطے حقیقی ہیں، ان کے مشترک مماس
کھینچنے کا ایک خطی ہندی عمل دریافت کرو۔

[جون کالج ۱۸۸۶ء]

۴۰۱۔ کئی ایک گزے ایک ثابت نقطہ میں سے
گذرتے ہیں اور دو دی ہوئی سطحوں کو مس کرتے
ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقاط تماس دو دائروں پر
واقع ہوتے ہیں اور کسی ایک کرہ کے مرکز کا طریق
ایک بیلیجی ہے۔

اگر سطحوں کا درمیانی زاویہ 90° ہو تو ثابت کرو کہ
بیلیجی کے ماسکوں کا درمیانی فاصلہ نصف محور اعظم
کے برابر ہے۔

۴۰۲۔ ایک مخروطی تراش کا ماسکہ S ہے اور اسکے
ماس PN ، ط Q نظیری مرتبوں کو بالترتیب L اور
 M پر قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ PM S زاویہ L سے

کی تنصیف کرتا ہے۔

۳۰۳۔ ایک مخروطی تراش ایک مثلث کے اندر بنی ہوئی ہے اور مثلث کے اضلاع اسکو مس کرتے ہیں اس تراش کا ایک ماسکہ دیا ہوا ہے معلوم کرو کہ دوسرے ماسکہ کس طرح دریافت کیا جائے۔ کیا ایک سے زیادہ حل ممکن ہیں؟

۳۰۴۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی تراش کے ماسکی وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق ایک متشابہ مخروطی تراش ہے۔

۳۰۵۔ دو مخروطی تراشیں شکلاً اور وضعاً متشابہ ہیں اور وہ ایک دوسرے کو l اور b پر قطع کرتی ہیں، ایک مشترک مماس انکو n اور q پر ملتا ہے اور n q کو ایک نقطہ r تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ $q = n + r$ ، اگر r اور b n میں سے گزرنے والی مخروطی تراش کو h اور k پر اور اگر h q n محدودہ کو s پر ملے تو ثابت کرو کہ $n = s$ ۔

۳۰۶۔ ایک مخروطی تراش ایک مثلث abc کے

گرد بنی ہوئی ہے، اس کا ایک ماسکہ ب ج پر واقع ہے، نظیری مرتب کا لفاف دریافت کرو۔ اگر ۱ زاویہ قائمہ ہو تو ثابت کرو کہ لفاف ایک شلجمی ہے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۴۰۷۔ تین نقطے ۱، ب، ج دے ہوئے ہیں ثابت کرو کہ دو ایسے شلجمی کھینچ سکتے ہیں جو ۱ اور ب میں سے گزریں اور جن کا ماسکہ ج ہو، نیز ثابت کرو کہ ان شلجمی خطوں کے محور اس ہندولی کے متقابلوں کے متوازی ہیں جو ج میں سے گذرتا ہے اور جس کا ماسکہ ۱ اور ب ہیں۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۴۰۸۔ اگر دو مخروطی تراشوں کا ایک مرتب مشترک ہو تو ثابت کرو کہ ان کے چار نقاط تقاطع ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔

[کینز کالج ۱۸۸۵ء]

۴۰۹۔ ثابت کرو کہ ایک ہیلیجی کے ان عماسوں کے تقاطع کا طریق جو محور اعظم اور اصغر سے بالترتیب مساوی زاویے بناتے ہیں لیکن ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ نہیں بناتے ایک قائم ہندولی ہے جس کے راس ہیلیجی کے ماسکے ہیں۔

[کرائسٹ کالج ۱۸۸۵ء]

۴۱۰۔ ایک ہڈولی کا تقارب ج ن ایک، یلیجی کو نقطہ ن پر قطع کرتا ہے، یلیجی کے اعظم اور اصغر محور بالترتیب ہڈولی کے مزدوج اور قاطع محور ہیں، ج ن کو ن تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ن ن ج ن اور ج د پر عمود ن م اور ن ق م کھینچے گئے ہیں جو اس کو بالترتیب م اور م پر ملتے ہیں جہاں ق، ن ق م اور ہڈولی کا نقطہ تقاطع ہے ثابت کرو کہ ق م نقطہ ق پر کا تماس ہے۔

[سڈنی کالج سسٹم ۱۸۶۱]

۴۱۱۔ دو یلیجی شکلاً اور وضعاً متشابہ ہیں، ان کے مشترک تماسوں کے دو زوج ایک دوسرے کو س اور س پر قطع کرتے ہیں، ایک یلیجی کا ایک تماس ان کو ص ط، ص ط پر کاٹتا ہے اور دوسرے یلیجی کا تماس ان کو ص ط، ص ط پر ملتا ہے، اگر ص ط، س میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ ص بھی س میں سے گزرتا ہے۔

۴۱۲۔ ایک شلجی اور ایک مرکزدار مخروطی تراش دونوں ایک دوسرے کو چار نقطوں د ب، ج، د پر قطع کرتے ہیں مخروطی تراش کے وہ قطر کھینچے گئے ہیں جو د ب اور ج د کے متوازی ہیں اور ان کے سروں کو مستقیم خطوں کے ذریعہ ملایا گیا ہے، ثابت کرو۔

کرو کہ شلجی کا محوران میں سے ایک خط کے متوازی ہے۔

[جون کالج ۱۸۶۱ء]

۴۱۳۔ ایک مخروطی تراش کے دو نقطوں ن اور ق کے حماس نقطہ د پر ملتے ہیں اور د سے دو مستقیم خط کھینچے گئے ہیں جو تراش کو کاٹتے ہیں اور قاطع محور سے مساوی زاوے بناتے ہیں، اگر وہ ن ق کو م اور ل پر ملیں اور وترون کے نقاط تنصیف ر اور س ہوں تو ثابت کرو کہ ر م ل س ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔

[پتیر ہوس ۱۸۸۲ء]

۴۱۴۔ دو متشابہ مخروطی تراشوں کے مرتب متوازی ہیں اور انکا ماسکہ س مشترک ہے، اگر س میں سے گزرنے والا ایک مستقیم خط ان مخروطی تراشوں کو ن اور ق پر ملے تو کن ق کے نقطہ تنصیف کا طریق دریافت کرو۔

[کرائسٹ کالج ۱۸۸۲ء]

۴۱۵۔ ا، ب، ج کوئی تین ثابت نقطے ہیں ا میں سے ایک مستقیم خط کھینچا گیا ہے جو ایک دی ہوئی مخروطی تراش کو ن، ق پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن ب اور ق ج کے تقاطع کا طریق

ایک مخروطی تراش ہے۔

[جیس کا ل ۱۸۸۶ء]

۴۱۶۔ ایک ثابت نقطہ ہے اور ایک دئے ہوئے مستقیم خط پر ایک نقطہ ن لیا گیا ہے، اگر اسی خط پر ایک نقطہ ق ایسا لیا جائے کہ ن ق اور ون کی باہمی نسبت مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ن اور وق کے نقطہ تنصیف کو ملانے والا خط ہمیشہ ایک ایسی مخروطی تراش کو مس کرتا ہے جس کا ماسکہ وہ ہے۔

[جیس کا ل ۱۸۸۶ء]

۴۱۷۔ ثابت کرو کہ ایک ہم ماسکہ ہیلیجی اور ہڈلولی ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں اور ہڈلولی کے متقارب ہیلیجی کے امدادی دائرہ پر کے اُن نقاط میں سے گزرتے ہیں جو نقاط تقاطع کے نظیری نقاط ہیں۔

۴۱۸۔ ایک خط اب ایک ثابت نقطہ ا میں سے کھینچا گیا ہے اور ایک ثابت دائرہ کو ب پر ملتا ہے، نقطہ ب میں سے ایک خط ب ج کھینچا گیا ہے جو اب پر عمود ہے اور جو ایک ہم مرکز دائرہ سے ج پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ اگر نقطہ ج میں سے ایک خط اب کے متوازی کھینچا جائے تو وہ ایک مخروطی تراش کو مس کرتا ہے۔

[پنر ہوس ۱۸۸۴ء]

۴۱۹ - ایک مرکز دار محروطی تراش کے مرتب پر ایک نقطہ ہے اس نقطہ سے تراش کے دو ماس کھینچے گئے ہیں اور ان کے نقاط تماس کو ملایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس طرح سے جو مثلث بنتا ہے اس کے عمودی مرکز کا طریق ایک ایسی محروطی تراش ہے جو دی ہوئی تراش کے متشابه ہے [پتر ہوس ۱۸۸۳ء]

۴۲۰ - ہم ماسکہ محروطی تراشوں کا ایک نظام دیا ہوا ہے اور ایک ثابت مستقیم خط اُن میں سے ایک کو دو نقطوں پر ملتا ہے، اگر ان نقطوں پر تراش کے عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک مستقیم خط ہے [پتر ہوس ۱۸۸۳ء]

۴۲۱ - ایک شلجی کے مرتب پر کوئی نقطہ لیا گیا ہے اس نقطہ کو ایک ماسکہ مان کر اور شلجی کے ماسکہ کو دوسرا ماسکہ مان کر ایک ہیلجی یا ہڈولی بنایا گیا ہے، جن نقطوں پر یہ منحنی مرتب کو قطع کرتا ہے اُن پر اس کے ماس اور عماد کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ یہ شلجی کے بھی ماس ہیں۔

[پتر ہوس ۱۸۸۳ء]

۴۲۲ - ایک محروطی تراش کا ایک ثابت وتر ن ق ایک قطر کو ل پر ملتا ہے اور اگر ل پر اس قطر کا معین کھینچا جائے تو وہ ن اور ق پر کے ماسوں کو ح اور ک پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ح ک کی تنصیف نقطہ ل پر

ہوتی ہے۔

[کیرکاج ۱۸۸۳ء]

۴۲۳۔ ایک مخروطی تراش کے نقطہ ن میں سے دو وترن ق، ن ق، ن ق کھینچے گئے ہیں، اگر ق اور ق میں سے وتروں پر عمود نکالے جائیں تو وہ ن پر کے عماد سے بالترتیب ل اور ل پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ن ل، ن ل کو آپس میں وہی نسبت ہے جو ن ق، ن ق کے متوازی قطروں کے مربعوں کو آپس میں ہے۔

[پترہوس ۱۸۸۵ء]

۴۲۴۔ ایک مخروطی تراش پر چار نقطے ا، ب، ج، د ایسے ہیں کہ ان پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ا، ب اور ج، د کے متوازی جو قطر ہیں ان کے مربعوں کا مجموعہ ان قطروں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہے جو ا، ج اور ب، د کے متوازی ہیں۔

[کیرکاج ۱۸۸۵ء]

۴۲۵۔ دو ثابت نقطوں ۱ اور ۲ کا درمیانی فاصلہ ۲ ہے، ایک مثلثی ان نقطوں میں سے گزرتا ہے، ا، ب کے نقطہ تصحیف سے فاصلہ ج پر ایک مستقیم خط ہے جو مثلثی کا مرتب ہے، ثابت کرو کہ مثلثی کے ماسک کا طریق ایک مخروطی تراش ہے جو مثلثی ہوگی اگر

ج بڑا ہون سے اور ہڈولی اگر ج چھوٹا ہون سے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۴ء]

۴۲۶۔ ایک دائرہ ایک کاغذ کے تختہ پر بنایا گیا ہے اور کاغذ کو اس طرح تہ کیا گیا ہے کہ کاغذ کا کونہ دائرہ کے محیط پر واقع ہوتا ہے، ثابت کرو کہ جیسے یہ کونہ دائرہ کے محیط پر حرکت کرتا ہے کاغذ کا شکن ایک مخروطی تراش کو لف کرتا ہے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۴ء]

۴۲۷۔ ایک کاغذ کی شکل نصف دائرہ سے، کاغذ کو اس طرح تہ کیا گیا ہے کہ قطر کا لفظ پر کا ایک خاص نقطہ ن ہمیشہ اس کے گول گھیر پر واقع ہوتا ہے، ثابت کرو کہ کاغذ کی شکن ہمیشہ ایک ثابت مخروطی تراش کو مس کرتی ہے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۴۲۸۔ ایک دائرہ اور ایک مخروطی تراش ایک دوسرے کو ب، ج، د، ع پر قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ اُن خطوں میں سے ہر ایک جو بالترتیب ب ج اور د ع، ب د اور ج ع، ب ع اور ج د کے درمیان فی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں دو دئے ہوئے مستقیم خطوں میں سے کسی ایک کے متوازی ہیں۔

۴۲۹۔ ط ن، ط ن ایک مخروطی تراش کے ماس ہیں اور ن گ، ن گ نقاط ن، ن پر کے عماد

ہیں، ثابت کرو کہ $\text{طن} : \text{طن} = \text{ن} : \text{گ}$: $\text{ن} : \text{گ}$
 نیز ثابت کرو کہ اگر $\text{گ} : \text{ل}$ ، $\text{گ} : \text{ل}$ خط $\text{ن} : \text{ن}$ پر عمود ہوں
 تو $\text{ن} : \text{ل} = \text{ن} : \text{ل}$

[کراسٹ کا پ ۱۸۸۵]

۳۳۰۔ ایک نقطہ ط سے ایک مخروطی تراش کے دو ماس
 کھینچے گئے ہیں جو اسکو نقاط ن اور ق پر ملتے ہیں، طن
 کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو ط ق کو ل پر ن ق
 کو و پر، اور مخروطی تراش کو ر اور س پر ملتا ہے،
 ثابت کرو کہ $\text{ل} : \text{و} = \text{ل} : \text{ر} \times \text{ل} : \text{س}$

[کون کا پ ۱۸۸۵]

۳۳۱۔ ایک ہیلیجی کے ماس کے س اور س ہیں اس پر
 دو نقطے ن اور ق لئے گئے ہیں، $\text{س} : \text{ن}$ اور $\text{س} : \text{ق}$
 ایک دوسرے کو م پر، $\text{س} : \text{ق}$ اور $\text{س} : \text{ن}$ نقطہ ل پر
 اور زاویوں $\text{ق} : \text{س} : \text{ن}$ اور $\text{ق} : \text{س} : \text{ن}$ کے منصف
 ایک دوسرے کو ر پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ
 $\text{ر} : \text{ن}$ ، $\text{ر} : \text{ق}$ ہیلیجی کے ماس ہیں اور نقطے م اور ل
 ایک ہم ماسکہ ہڈولی پر واقع ہیں جسکو $\text{ر} : \text{م}$ اور $\text{ر} : \text{ل}$
 مس کرتے ہیں۔

[جیس کا پ ۱۸۸۵]

۳۳۲۔ ایک خط، ایک دائرہ جس کا مرکز و ہے اور ایک
 نقطہ س تینوں دئے ہوئے ہیں، اس خط پر کے ایک

متغیر نقطہ ع کو س کے ساتھ ایک خط کے ذریعہ ملا یا گیا جو دائرہ کو نقاط ص اور د پر ملتا ہے نقطہ س سے و ص اور و د کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں جو ع و کو نقاط ن اور ق پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ان نقطوں کا طریق ایک مخروطی تراش ہے جس کا ماسک س سے اور جس کا مرتب مذکورہ بالا دیا ہوا خط ہے۔ مخروطی تراش کو اس طرح بنانے کے عمل سے یہ مسئلہ حل کرو کہ اگر کسی نقطہ سے ایک مخروطی تراش کے تماس کھینچے جائیں تو ان کے محاذی ماسک پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

[جون کالج ۱۸۸۳ء]

۳۳۳۔ اگر دو ہم ماسک ہیلیجی دو ہم ماسک بذلولی خطوط کو قطع کریں تو ثابت کرو کہ اس طرح سے جو سطحی ذواربعۃ الاصلع بنتی ہے اسکے قطر ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ نتیجہ ایک ہم ماسک اور ہم محور شلجی خطوط کے نظام کے لئے بھی درست ہے

[جون کالج ۱۸۸۳ء]

۳۳۴۔ ایک قطع زائد بنایا گیا ہے جسکا ماسک وہی ہے جو ایک قطع ناقص کا ہے اور اس ماسک کے متعلقہ نقطہ راس پر قطع ناقص کا جو تماس ہے وہ مذکورہ بالا قطع زائد کا مرتب ہے۔ اگر ان نقطوں سے جہاں پر زائد ہیلیجی کے محور اصغر کو قطع کرتا ہے ہیلیجی کے تماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ یہ تماسات زائد کے

مقاربوں کے متوازی ہونگے۔ [جون کالج ۱۸۸۳ء]

۳۳۵۔ ایک بیلیجی اور ایک ہڈولی کے ماسکے مشترک ہیں اور وہ ایک دوسرے کو ن پر ملتے ہیں، نقطہ ن پر ہڈولی کا ماس ن ماس ہے، ماسکوں سے ماس پر عمود ماس اور ماس سے نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ $n \times m = b \times c$ جہاں $b \times c$ بیلیجی کا محور اصغر ہے

[پتربوس ۱۸۸۳ء]

۳۳۶۔ ایک قائم ہڈولی ایک بیلیجی کو نقاط ن اور ق پر ملتا ہے بیلیجی کے محور ہڈولی کے مقارب ہیں، محور ج ۱ پر ماسین ن م اور ق ل، اور محور ج ب پر ماسین ن ر، ق ط کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ $m \times c + n \times l = j \times a$ اور $j \times l : j \times r = j \times 1 : j \times b$

[پتربوس ۱۸۸۳ء]

۳۳۷۔ ایک دائرہ کے محیط پر ایک ثابت نقطہ وہ ہے اس نقطہ سے ایک وتر وا کھینچا گیا ہے اور اس کو نقطہ ب تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ وب اور وا کے مربوں کا فرق مستقل ہے، ثابت کرو کہ ب میں سے گزرنے والا خط جو وب پر عمود ہے ایک مخروطی تراغی کو مس کرتا ہے جس کا مرکز وہ ہے اور جبکہ ماسک وہ میں سے گزرنے

والے دائرہ کے قطر کا دوسرا سرا ہے۔ [کلیر کالج ۱۸۸۲ء]
 ۳۳۸۔ ایک مخروطی تراش کے دو ماس دئے ہوئے ہیں
 اور ایک ماسکہ بھی معلوم ہے، ثابت کرو کہ اس کے محور اصغر
 کا لفاف ایک شلجی ہے جسکا ماسکہ اس ہے۔

[ترنی کالج ۱۸۸۲ء]

۳۳۹۔ ایک مخروطی تراش کے ماسکی وترن س ق کا
 مقام دیا ہوا ہے اور اس کے محور کا مقام بھی معلوم ہے
 تراش کو م قسم کرو۔ [ایمرک کالج ۱۸۸۲ء]

۳۴۰۔ اگر ایک ہیلیجی کا محور اعظم ج ۱ ہو اور ن ل ن
 ایک دگنا معین ہو جو ج ۱ کی ل پر منصف کرے
 تو تظیل سے ثابت کرو کہ ن پر کا ماس ل ن کے
 متوازی ہے۔ [پمبرک کالج ۱۸۸۲ء]

۳۴۱۔ ایک ہیلیجی اور ایک ہڈولی ہم مرکز اور ہم محور
 ہیں، ایک نقطہ ن کے قطبی لمحاظ دونوں مخروطی
 تراشوں کے ایک دوسرے کو ق پر قطع کرتے ہیں
 اور ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں ثابت
 کرو کہ ن کا طریقہ دو ایسے مستقیم خط ہیں جو مرکز ج
 میں سے گزرتے ہیں لیکن اگر مخروطی تراشیں ہم ماسکہ
 ہوں تو ثابت کرو کہ ج، ق، ن ایک مستقیم خط پر واقع
 ہوتے ہیں اور ج ن \times ج ق مستقل ہے۔

[کرائٹ کالج ۱۸۸۲ء]

۴۴۲۔ ایک مخروطی تراش کا ماسکہ 'مرتب' خدوج المکرزہ
تینوں دئے ہوئے ہیں، ماسکہ میں سے گزرنے والا ایک
دیا ہوا مستقیم خط مغنی کو دو نقطوں پر کاٹتا ہے اس کے
معلوم کرنے کا ہندسی عمل دریافت کرو۔

[کوین کا ج ۱۸۸۳]

۴۴۳۔ ایک شلجی کا ماسکہ ایک بیلیجی کے ایک ماسکہ پر
منطبق ہوتا ہے، شلجی بیلیجی کے مزدوج محور کو مس کرتا
ہے، ثابت کرو کہ بیلیجی اور شلجی کے ایک مشترک مماس
کے محاذی ماسکہ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

[ترنی کا ج ۱۸۸۵]

۴۴۴۔ ایک بیلیجی کے ماسکے س اور س ہیں اور
اسکے اعظم اور اصغر محور AJ اور B ج B ہیں
بیلیجی اور ایک ہم ماسکہ بذلولی کا ایک نقطہ تقاطع N ہے
اور بذلولی قاطع محور AJ ہے، ثابت کرو کہ
 $SN = AN$ ، $SN = AN$ اور $AB = CN$

[ترنی کا ج ۱۸۸۵]

۴۴۵۔ ایک دئے ہوئے دائرہ کی سطح میں دو نقطے N
اور Q لئے گئے ہیں، NQ کے متوازی دائرہ کا وتر
 EC س کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ EC س کے مختلف
مقامات کے لئے EN اور SQ کے تقاطع کا طریق
ایک مخروطی تراش ہے۔

[ترنی کا ج ۱۸۸۵]

۳۳۶۔ ایک دائرہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے اور ایک دئے ہوئے مستقیم خط کو ایک مستقل زاویہ پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ مرکز کا طریق ایک مخروطی تراش ہے [جیس کاچ ۱۵۸۲]

نوٹ ”دائرہ مستقیم خط کو مستقل زاویہ پر کاٹتا ہے شاید اس کا یہ مطلب ہے کہ نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والا نصف قطر مستقیم خط سے مستقل زاویہ بناتا ہے، مترجم۔

۳۳۷۔ ایک تراش کے ایک وتر کے محاذی ماسکہ پر ایک مستقل زاویہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ اس کے سروں پر گئے ماس ایک دوسرے کو ایک ایسی مخروطی تراش پر قطع کرتے ہیں جبکہ ماسکہ اور مرتب دونوں وہی ہیں جو اصلی تراش گئے ہیں۔

[جون کاچ ۱۵۸۳]

۳۳۸۔ ایک بیلیجی اور ایک ہڈلولی کا قاطع محور ایک ہی ہے اور ان کے خروج المرکز ایک دوسرے کے شکافی ہیں، اگر ایک منحنی کے ماسکہ سے دوسرے منحنی کے ماس یکھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ یہ ماس ایک دوسرے کو دو نقطوں پر قطع کریں گے اور ایک دوسرے سے زاویے قائمے بنائیں گے، نیز ثابت کرو کہ یہ ماس مزدوج محوروں کو ایسے نقطوں پر قطع کریں گے جو امدادی دائرہ پر واقع ہوں گے

[جون کاچ ۱۵۸۳]

۴۴۹۔ ایک مرکز دار تراش پر کوئی نقطہ ق ہے، اس نقطہ کو ماسکات س اور س کے ساتھ خطوط ق س اور ق س کے ذریعہ ملا یا گیا ہے، یہ خط دوبارہ تراش کو ن اور ن پر ملتے ہیں، اگر ن اور ن پر کے ماس ط پر ملیں تو ثابت کرو کہ ق ط کی تنصیف محور صغر پر ہوتی ہے، نیز ثابت کرو کہ ط کا طریق ایک مخروطی تراش ہے۔

[پتر ہوس ۱۸۸۳ء]

۴۵۰۔ ثابت کرو کہ ایک مرکز دار تراش کے دو نقطوں میں سے دو ایسے دائرے کھینچے جا سکتے ہیں جو تراش کو مس کریں اور یہ نقاط تناس ایک قطر کے سروں پر منطبق ہوتے ہیں۔

[کنیز کا ۱۸۸۳ء]

مخروط

۴۵۱۔ ایک مخروط کا راس ۱ اور محور ۱ ب ہے، مخروط کے اندر ایک نقطہ س لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ۱ ب کے ساتھ آن تراشوں کی سطحیں جن کا ماسکہ س ہے ایسے حادے زاوے بناتی ہیں جن کا فرق زاوہ ۱ ب کا دو چند ہے۔

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۴ء]

۴۵۲۔ معلوم کرو کہ ایک دے ہوئے محروط سے ایک ایسی تراش کس طرح حاصل کی جائے جس کا خروج المرکز زیادہ سے زیادہ ہو۔

[آئی۔ سی۔ ایس ۱۸۸۶]

۴۵۳۔ کن شرائط کے ماتحت ایک محروط کی تراش قائم بذلولی ہوگی؟ ایسی صورت میں دریافت کرو کہ کاٹنے والی سطح کا ضروری میلان کس طرح معلوم کیا جائے۔

[آئی۔ سی۔ ایس ۱۸۸۵]

۴۵۴۔ معلوم کرو کہ ایک محروط کی بذلولی تراش کا مرکز اور اس کے متقارب کس طرح دریافت کئے جائیں، نیز معلوم کرو کہ ایک دے ہوئے محروط سے ایک ایسا بذلولی کس طرح کاٹا جائے جس کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ بڑے سے بڑا ہو۔

[آئی۔ سی۔ ایس ۱۸۸۴]

۴۵۵۔ ثابت کرو کہ ایک قائم محروط کی بذلولی تراش کا محور اصغر ان مستدیر تراشوں کے قطروں کا وسط تناسب ہے جو بیلیجی کے محور اعظم کے سروں میں سے مستوی سطحیں گزارنے سے پیدا ہوتی ہیں۔

اگر بیلیجی کا ظل ایک ایسی مستوی سطح پر بنایا جائے جو محروط کے محور پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ ظل کے ماسکوں کا درمیانی فاصلہ اوپر کی دو مستدیر تراشوں

کے نصف قطروں کے فرق کے مساوی ہے۔
 ۴۵۶۔ ایک مستدیر مخروط کو مستوی سطحوں سے تراش کر
 شلجی خطوں کا ایک سلسلہ حاصل کیا گیا ہے، اس سلسلہ
 کے ہر ایک شلجی کا محور ایک ایسے مستقیم خط و م کو
 قطع کرتا ہے جو مخروط کے راس و میں سے گزرتا ہے،
 اگر ایک تراش و م کو ل پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ
 نسبت ول : ال = ج د تمام شلجی خطوں کے لئے
 مستقل ہے اس میں ۱ تراش کا راس ہے، ج ماسکرا
 کا مرکز ہے اور د وہ نقطہ ہے جہاں تراش مخروط کے
 محور و د کو کاٹتی ہے

[پیرک کالج ۱۸۸۶ء]

۴۵۷۔ اگر ایک مخروط کی دو تراشوں کا مرتب مشترک ہو
 تو ثابت کرو کہ تراشوں کے خاص دتروں (معدلون) کو
 آپس میں وہی نسبت ہے جو ان کے خروج المرکز و نکو
 آپس میں ہے۔

[جیسس کالج ۱۸۸۸ء]

۴۵۸۔ ثابت کرو کہ ان تمام مستوی تراشوں کے مرکروں
 کا طریق جن کے ماسکون کا باہمی فاصلہ وہی ہو ایک
 قائم مستدیر اسطوانہ ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۸ء]

۴۵۹۔ ثابت کرو کہ ان تمام تراشوں کے مرکز جن کے

اصغر محورون کا طول ایک ہی ہو ایک ایسی سطح پر واقع ہوتے ہیں جو ایک بذلولی کو قاطع محور کے گرد پھرانے سے حاصل ہوتی ہے۔

[پتر ہوس ۱۸۸۶ء]

۴۶۰۔ ایک ہیلیجی مخروط بنانا منظور ہے جو دو دائرے ہوئے دائروں میں سے گزرے، یہ دائرے مختلف سطحوں میں واقع ہیں، معلوم کرو کہ اس عمل کے لئے کیا شرائط ضروری ہیں۔

[ترتی کالج ۱۸۸۶ء]

۴۶۱۔ ایک ہیلیجی بلحاظ مقدار اور مقام کے دیا ہوا ہے ثابت کرو کہ ان قائم مخروطوں کے راسوں کا طریق جنہیں سے ہیلیجی مذکور کاٹا جاسکتا ہے ایک بذلولی ہے جو ہیلیجی کے ماسکوں میں سے گزرتا ہے،

[جیس کالج ۱۸۸۶ء]

۴۶۲۔ معلوم کرو کہ ایک قائم مخروط کو ایک مستوی سطح کے ذریعہ کس طرح کاٹا جائے کہ تراش ایک ہیلیجی ہو جس کا خروج المرکز دیا ہوا ہے اور جس کے محور اعظم کا طول بھی معلوم ہے۔

[کتیرین کالج ۱۸۸۶ء]

۴۶۳۔ ایک مخروط کا زاویہ راس قائمہ ہے، اس کو ایک مستوی سطح سے کاٹا گیا ہے، ثابت کرو کہ تراش

کے جو دو تہاسی کڑے ہیں ان کے نیقظروں کے مجموعہ کا مربع تراش کے محروں کے مربوں کے مجموعہ کے برابر ہے۔

[پتر ہوس ۱۸۸۶ء]

۳۶۳۔ دو قائم مستدیر محروطوں کے راس ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اور ان کے راسی زاویئے قائمے ہیں، نیز انکا ایک تگونی یعنی خط مشترک ہے، اگر ایک ہی سطح مستوی سے ہر ایک محروط کو کاٹا جائے تو ایک تراش کا محورا صغر دوسری تراش کے مزدوج محور کے برابر ہوگا۔

[کلیر کالج ۱۸۸۶ء]

۳۶۵۔ ثابت کرو کہ ایک قائم مستدیر محروط کی شلجی تراشوں کے وتر خاص ان فاصلوں کے متناسب ہیں جو تراشوں کے رؤس اور محروط کے راس کے درمیان ہوں۔

[ترنی کالج ۱۸۸۶ء]

۳۶۶۔ قائم مستدیر محروطوں کا ایک سلسلہ ایسا ہے کہ اس سلسلہ کا ہر ایک محروط ایک دئے ہوئے قائم ہڈولی میں سے گزرتا ہے، ثابت کرو کہ محروطوں کے راسوں کا طریق ایک ہیلیجی ہے جس کا خروج المزکر $\frac{1}{2}$ ہے۔

[پیرک کالج ۱۸۸۵ء]

۳۶۷۔ دو متقاطع کڑے ایک قائم محروط کے اند بنائے گئے ہیں (یعنی اس کو داخلا مس کرتے ہیں) اور انکا ایک مشترک نقطہ ن ہے، ثابت کرو کہ ن پر کی ماسی سطحیں

اُس مستقیم خط سے مساوی زاوے بنائی ہیں جو نقطہ ن کو مخروط کے راس سے وصل کرتا ہے۔

[ترتی ہوس ۱۸۸۶]

۴۶۸۔ اگر ایک قائم مستدیر مخروط کو ایسی مستوی سطح سے کاٹا جائے جو نہ تو محور کے متوازی ہو اور نہ ہی اُس پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ ہر صورت میں تراش ہلیجی ہوگی

[کوین کالج ۱۸۸۶]

۴۶۹۔ ایک قائم مخروط کو کاٹنے سے مختلف ہڈولی تراشیں حاصل کی گئی ہیں ان تراشوں کے محور مساوی ہیں (اور سب کے اعظم محور ایک ہی سطح میں واقع ہیں) ثابت کرو کہ ان تراشوں کے مرکزدوں کا طریق ایک ہڈولی ہے

[یکتھرن کالج ۱۸۸۶]

۴۷۰۔ ایک مخروط کی ایسی شاخجی تراش معلوم کرو جس کے وتر خاص کا طول ایک دی ہوئی مقدار کے مساوی ہو۔

[ترتی ہوس ۱۸۸۱]

۴۷۱۔ ثابت کرو کہ ایک قائم مخروط کی ہلیجی تراش کا محور اصغر اُن عمودوں کا وسط تناسب ہے جو ہلیجی کے راسوں سے مخروط کے محور پر نکالے جائیں، اگر مخروط کا راس رہو اور د وہ نقطہ ہو جہاں مخروط کا محور تراش کے محور اعظم کا کو کاٹتا ہے، تو ثابت کرو کہ

ج ۵ : ج ۱ = ج ۳ : ج ۱ + ج ۳

[ترقی کا چ ۱۸۶۱ء]

۳۷۲۔ ایک قائم مستدیر محروط کو متوازی مستوی سطحوں سے کانکرہ نڈولی تراشوں کا ایک سلسلہ حاصل کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان تراشوں کے امدادی دائرے ایک ایسے قائم محروط پر واقع ہوتے ہیں جس کا قاعدہ ایک ہیلیکس ہے جو دئے ہوئے ہیلیکس خطوں کے متشابہ ہے۔

[ترقی ہوس ۱۸۸۲ء]

۳۷۳۔ دو محروطوں کے راسی زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہے، اگر مستوی سطحوں کے ذریعہ ان محروطوں کی وہ تراشیں حاصل کی جائیں جن کے خروج المرکز بڑے سے بڑے ہوں تو ثابت کرو کہ ان خروج المرکزوں کے مشکافینوں کے مربعوں کا مجموعہ ایک کے برابر ہے۔

[ترقی کا چ ۱۸۸۵ء]

۳۷۴۔ ایک دیا ہوا مستقیم خط محروط کے محور پر عمود ہے معلوم کرو کہ کس طرح سے ایک تراش حاصل کی جائے جس کا مرتب یہ مستقیم خط ہو

[کوین کا چ ۱۸۸۵ء]

۳۷۵۔ ایک قائم مستدیر محروط اور ایک ہیلیکس دونوں دئے ہوئے ہیں، ہیلیکس کو اس طرح رکھو کہ وہ محروط کی ایک مستوی تراش ہو جائے۔

[ترقی کا چ ۱۸۸۳ء]

۴۷۶۔ ثابت کرو کہ مخروط کی ایک مستوی تراش کا وتر خاص ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو مخروط کے راس سے تراش کی سطح پر نکالا جائے۔

[ترتی کالج ۱۸۸۳ء]

۴۷۷۔ اگر ایک مخروط کی دو مستوی تراشوں کا مرکز مشترک ہو تو ثابت کرو کہ ان کے ماسکوں کو ملانے والا خط مخروط کے محور میں سے گزرتا ہے۔

[کوین کالج ۱۸۸۳ء]

۴۷۸۔ ایک مخروط کا راسی زاویہ قائمہ ہے، ایک مستوی تراش کے محور اعظم پر مخروط کے راس سے ایک عمود نکالا گیا ہے اور یہ محور اعظم کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے، ثابت کرو کہ تراش کا نیم وتر خاص ان دو حصوں کا وسط تناسب ہے۔

[یکتھن کالج ۱۸۸۳ء]

۴۷۹۔ دو مخروطوں کا راس مشترک ہے، ان کے محور ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور ان کے راسی زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہے، ایک مستوی سطح جو محوروں میں سے گزرنے والی سطح پر عمود ہے ان مخروطوں کو کاٹتی ہے، ثابت کرو کہ ہیلیجی تراشوں کے کسی ایک ماسک کے فاصلے بدلولی تراش کے ماسکوں سے بالترتیب مساوی ہیں

ان فاصلوں کے جو مخروط کے راس اور ہر ایک تراش کے قاطع محوروں کے درمیان ہیں، نیز ثابت کرو کہ نیم مزدوج محوروں کے مربعوں کا مجموعہ ان فاصلوں کے حاصل ضرب کے برابر ہے۔

[ترتی کالج ۱۸۸۳ء]

۴۸۰۔ اگر ایک مخروط کی تراش کا محور اصغر مستقل ہو تو ثابت کرو کہ اس کا مرکز سطح ہڈولی نما بالندویر پر واقع ہوتا ہے۔

[جیسس کالج ۱۸۸۳ء]



ضمیمہ

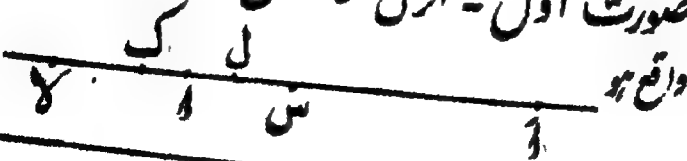
میلیمتری

مسئلہ (مسلل)

اگر l اور r میں سے ایسے خط کھینچے جائیں جو محور پر عمود ہوں تو ثابت کرو کہ مغنی ان خطوں کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

مسئلہ ۱: l سے r پر ایک طول s ک
 قطع کرو کہ $s \times r = l \times l$
 s کو مرکز اور r کو نصف قطر مان کر ایک
 دائرہ کھینچو، اب ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ نقطہ l کن
 مقامات پر واقع ہو کہ $l \times n$ اس دائرہ کو قطع کرے،
 یعنی ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ نقطہ l کے کن مقامات
 کے لئے $s \times k$ بڑا ہوگا $l \times s$ سے اور کن مقامات
 کے لئے چھوٹا ہوگا۔

صورت اول۔ اگر l نقاط s اور k کے درمیان



تو س ک = ر × ل لا < ر × لا لا یا س ا
 : س ک < س ل
 صورت دوم اگر ل نقاط س اور لا کے درمیان
 واقع ہو۔

ا س ل
 —————
 لا س ا لا
 تو س ک = ر × ل لا
 س ا = ر × لا لا
 : عمل تفریق سے ک ا = ر × ل ا > ل ا
 : س ک < س ل
 صورت سوم اگر ل، س ا محدودہ پر واقع ہو

ل ک ا
 —————
 لا س ا لا
 تو س ک = ر × ل لا
 س ا = ر × لا لا
 : عمل تفریق سے ک ا = ر × ل ا > ل ا
 : س ک > س ل
 صورت چہارم۔ اگر ل نقاط ا اور لا کے درمیان
 واقع ہو۔

ک ل
 —————
 لا س ا لا
 تو س ک = ر × ل لا > ر × لا لا یا س ا
 : س ک > س ل
 صورت پنجم۔ اگر ل، س لا محدودہ پر واقع ہو۔

ک ل

س ک = ر × لال > لال > س ل
 اب ہم نے ثابت کر دیا کہ اگر ل نقاط ل اور ل کے درمیان محور
 ل پر واقع ہو تو دائرہ عمود ل ن کو قطع کرتا ہے، لیکن اگر ل
 ل کے باہر واقع ہو تو یہ دائرہ اس عمود کو قطع نہیں کرتا اس لئے
 معلوم ہوا کہ اگر ل اور ل میں سے ایسے دو خط کھینچے جائیں
 جو محور پر عمود ہوں تو پہلی بالتمام ان خطوں کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

ہندولی

مسئلہ (مسلل)

اگر ل اور ل میں سے خط کھینچے جائیں جو محور پر عمود ہوں
 تو ثابت کرو کہ معنی ان خطوں کے بالکل واقع ہوتا ہے۔
 س ل یا س ل محدودہ پر ایک طول س ک ایسا قطع کرو کہ

س ک = ر × لال

س کو مرکز اور ر ل ل کو نصف قطران کر ایک دائرہ
 کھینچو، اب یہ دیکھنا ہے کہ نقطہ ل کن مقامات پر واقع
 ہو کہ دائرہ مذکورہ عمود ل ن کو قطع کرے یعنی یہ معلوم
 کرنا ہے کہ ل کے کن مقامات کے لئے س ک بڑا
 ہو گا س ل سے اور کن مقامات کے لئے چھوٹا ہو گا۔
 صورت اول اگر ل نقاط ل اور ل کے درمیان

واقع ہو ک ل
 س ا لا ا

تو س ک = ر × ل لا > ر × لا لا یا س ا

صورت دوم اگر ل نقاط لا اور لا کے درمیان واقع ہو

ک ل
 س ا لا ا

س ک = ر × لا ل

س ا = ر × لا لا

عمل تفریق سے ک لا = ر × ل لا < ل لا

س ک > س ل

صورت سوم اگر ل، س لا محدودہ پر واقع ہو

س ا لا ا

س ک = ر × لا ل

س ا = ر × لا لا

عمل تفریق سے ک لا = ر × ل لا < ل لا

س ک < س ل

صورت چہارم اگر ل نقاط لا اور س کے درمیان واقع ہو

$$تو \quad 1 \times 1 = 1$$

(دیکھو مسئلہ ۱)

۲۔ مسئلہ ۱ کی شکل میں اگر n ص پر عمودی d نکالا جائے تو $d = 1 \times n = n$ ص

(دیکھو مسئلہ ۱، اشق ۱)

۳۔ شلجمی کا ایک ماس دو دیگر ماسوں کے جو حصے کرتا ہے ان کی باہمی نسبت ہمیشہ مستقل رہتی ہے

(دیکھو عملیات ۱۱)

۴۔ اگر دو ثابت خطوں $ون$ ، $ون$ کو نقاط $ما$ اور $ما$ پر اس طرح تقسیم کیا جائے کہ $وما$ اور $وما$ ایک ثابت خطی ارتباط $لہ \times وما + مہ \times وما = ا$ کے ذریعہ باہم منسلک ہو سکیں تو ثابت کرو کہ $ما$ ایک ایسے شلجمی کو لے کرتا ہے جو $ون$ ، $ون$ کو مس کرتا ہے۔
سابق مسئلہ کی روش سے

$$\frac{ن ما}{وما} = \frac{وما}{ما ن} \text{ یعنی } \frac{وما}{ون - وما} = \frac{وما}{ون - وما}$$

$$\text{اس لئے } 1 = \frac{وما}{ون} + \frac{وما}{ون}$$

$$\text{یا } لہ \times وما + مہ \times وما = ا \quad \text{جہاں}$$

$$لہ = \frac{ا}{ون} \quad , \quad مہ = \frac{ا}{ون} \quad \text{وغیرہ}$$

۵۔ س ایک ثابت نقطہ ہے ، ایک ثابت مستقیم خط
اور اس پر ایک نقطہ مایا گیا ہے اور اس سے اس پر مان
قائم کیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ مان ایک ایسے شلجی
کو لف کرتا ہے جس کا ماسک س ہے اور جس کے اس
پر کا ماس اور ہے

[مسئلہ ۱۰ کا عکس]

۶۔ س ایک ثابت نقطہ ہے ، ایک ثابت مستقیم خط
وق پر ایک نقطہ ویا گیا ہے اور وق ، اس سے
ایک مستقل زاویہ (عہ) بناتا ہے ، وق ایک ایسے
شلجی کو مس کرتا ہے جس کا ماسک س ہے اور جوق
کو ایک ثابت نقطہ ق پر مس کرتا ہے جہاں زاویہ
س ق و = عہ

[یہ ایک مسئلہ عامہ ہے جس کی خاص صورت آخری مسئلہ
ہے یہ مسئلہ ۱۳ کا عکس ہے]

۷۔ دو ثابت مستقیم خط وق ، وق ہیں ، ان کے درمیان
ایک نقطہ س ہے ایک خط ق ق ایسا کھینچا گیا ہے کہ
س ق = ق ق - ق وق ، ق ق کا نفاذ ایک
ایسا شلجی ہے جس کا ماسک س ہے اور جوق ، وق کو
مس کرتا ہے ۔
[مسئلہ ۲ کا عکس]

۸۔ ماسی مثلث کا مرکز عود می مرتب پر واقع ہوتا ہے
[دیکھو عملیات ۱۳]

محروطی تراشین

۱۔ اگر ن پر کا ماس مرتب کو مے پر اور وتر خاص کو ک پر مے تو س ک : س مے = ر

[دیکھو ہذلولی کے مسئلہ ۱۰ کی مثالیں]

۲۔ ایک دئے ہوئے دائرہ کا ایک ثابت قطر AO ہے دو نقطے س س مرکز سے متساوی الفاصل ہیں س مآ، س مآ متوازی مستقیم خط ہیں جو دائرہ کو مآ، مآ پر ملتے ہیں تب

(۱) اگر س س دائرہ کے اندر ہوں تو مآ مآ کا نفاث ایک ہلیجی ہے۔

(۲) اگر س س دائرہ کے باہر ہوں تو مآ مآ کا نفاث

ایک ہذلولی ہے جس کا اعدادی دائرہ، دائرہ معلومہ ہے

یا اگر س س دو ثابت نقطے ہوں اور س مآ،

س مآ دو ایسے متوازی خط ہوں کہ س مآ \times س مآ

= مستقل مقدار تو مآ مآ کا نفاث ہلیجی ہوگا اگر س مآ

اور س مآ خط س س کی ایک ہی جانب میں پہنچے

جائیں اور نفاث ہذلولی ہوگا اگر س مآ، س مآ خط

س س کے مقابل جانبوں میں پہنچے جائیں۔

[دیکھو مسئلہ ہلیجی ۱۲ اور مسئلہ ہذلولی ۱۳]

۳۔ ج د ' ج د دو ثابت مستقیم خط ہیں اور د د اسطرح کھینچا گیا ہے کہ \triangle ج د د کا رقبہ ہمیشہ مستقل ہوتا ہے د د کا لغات ایک بذلولی ہے جس کے متقارب ج د ' ج د ہیں۔

[دیکھو مسئلہ بذلولی ۳۱]

۴۔ اگر ایک مثلث کا قاعدہ دیا ہوا ہو اور قاعدہ کے متعلقہ زاویوں کا فرق بھی معلوم ہو تو ثابت کرو کہ راس کا طریق ایک بذلولی ہوتا ہے۔

اگر فرق معلوم زاویہ قائمہ کے برابر ہو تو طریق ایک قائم بذلولی ہوتا ہے

[دیکھو عملیات ۳۳۵]

۵۔ ہم ماسکہ مخروطی تراشوں کا ایک نظام دیا ہوا ہے ایک مخروطی تراش کو ایک ثابت مستقیم خط دو نقطوں پر ملتا ہے، اگر ان نقطوں پر عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ انکے تقاطع کا طریق ایک مستقیم خط ہے۔

[دیکھو مثال ۴۲۰]

۶۔ ایک دئے ہوئے مستقیم خط کے قطبوں کا طریق بلحاظ ہم ماسکہ مخروطی تراشوں کے ایک نظام کے ایک مستقیم خط ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ اب دیا ہوا مستقیم خط ہے، وہ ہم ماسکہ تراش کھینچو جو اب کون پر مس کرے اب پر عمود

ن گ قائم کرو، اب کا قطب بلحاظ اس ہم ماسک کے ن ہے یعنی یہ ن گ پر واقع ہوتا ہے۔ کسی اور ہم ماسک کے ماس ن ط، ن ط کھینچو۔ اب ن گ زاویہ س ن س کی تنصیف کرتے ہیں اسلئے وہ زاویہ ط ن ط کی تنصیف کرتے ہیں یعنی معلوم ہوا کہ اب ن گ خطوط ن ط، ن ط کے موسیقی خط ہیں۔ اسلئے اب ن گ مزدوج ہیں بلحاظ اس مخروطی تراش کے جس کے ماس ن ط، ن ط ہیں اسلئے اب کا قطب بلحاظ اس تراش کے ن گ پر واقع ہوتا ہے۔ ۷۔ ایک مخروطی تراش پر کے ایک نقطہ کو تراش پر کے چار نقطوں کے ساتھ ملانے سے پنسل بنتی ہے اس کی غیر موسیقی نسبت مستقل ہوتی ہے۔ [تفصیل]

یا مرتب کو قاطع (خط) مان کر پنسل کے راس کو بدلو اور س پر لے جاؤ اس پنسل کے زاویے مسئلہ ۲ کی رو سے مستقل ہیں کیونکہ یہ اُس پنسل کے زاویوں کے نصف ہیں جو س کو ثابت نقاط کے ساتھ ملانے سے بنتی ہے۔ ۸۔ نیز اگر کسی مخروطی تراش کے چار ثابت نقطوں پر ماس چھپے جائیں اور ایک اور ماس انکو چار نقطوں پر ملے تو اس وسعت کی غیر موسیقی نسبت مستقل ہوگی اور پنسلوں کی نسبت کے برابر ہوگی۔

[متکافی کرو]

۹۔ اگر ایک مسدس ایک مخروطی تراش کے اندر بنائی جائے تو متقابل اضلاع کے جو تین زوج ہیں ان کے تین نقاط تقاطع ایک مستقیم خط پر واقع ہونگے پاسکل کا مسئلہ مخروطی ظل بناؤ جسمین متقابل اضلاع کے دو زوج متوازن ہوں اسکے بعد قائم تقطیل کے ذریعہ شکل کے ظل کو دائرہ بناؤ وغیرہ۔

۱۰۔ اگر ایک مسدس ایک مخروطی تراش کے گرد بنائی جائے تو اس کے تین قطر ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر قطع کریں گے۔ [بران شان کا مسئلہ]

(متکافی کرو)
۱۱۔ ایک دائرہ کا مرکز و ہے، ثابت کرو کہ اس کا قطبی متکافی بلحاظ کسی نقطہ (س) کے ایک مخروطی تراش ہے جس کا ماسکہ س ہے، اور نظیری مرتب و کا قطبی متکافی ہے اور خروج المرکز س و اور دائرہ کے نصف قطر کی باہمی نسبت کے برابر ہے،

۱۲۔ اگر ایک نظام کے دائروں کا اصلی محور ایک ہی ہو تو ثابت کرو کہ انکے قطبی متکافی بلحاظ ایک انتہائی نقطہ کے ہم ماسکہ مخروطی تراشیں ہوں گی۔

تمام شد

هندسی مخروطات



A

Absoissa	فصله
Aliter	متبادل ثبوت
Alternate segment	متبادل قطعه
Analysis	تحلیل
Angular point	نقطه راس
Anharmonic (Range, pencil)	غیر موسیقی سعت - پنسل
Auxiliary circle	امدادی دایره
Asymptote	متقارب
Asymptotic (cone, circle)	متقارب (مخروط دایره)
Axis (Axes)	محور - محاور
Axial plane	محوری سطح

B

Bead	منکه
------	------

Branch (of hyperbola)

شاخ (قطع زائد)

.....

C

Centre of Ellipse

مرکز (میلیبی)

Centre of Gravity

مرکز ثقل

Central Conic

مرکز دار تراش

Centroid

مرکز ہندسی

Chord (S)

وتر - اوتار

Coaxial (parabola)

ہم محور - (مکانی)

Collinear

ہم خط

Collinearity

ہم خطیت

Confocals

ہم ماسکات

Confocal Parabolas

ہم ماسک مکانی

Concavity

قعر

Concyclic points

ہم محیط نقطہ

Cone

مخروط

Conical

مخروطی

Conics

مخروطات

Concentric

ہم مرکز

Conicoid

مخروطی نما

Conjugate diameters

مزدوج قطر

Conjugate hyperbola

مزدوج ہذلولی

Conoid

مخروط نما

Construction

عمل

Contact

تماس

Conoidal Surface

مخروط نما سطح

Corresponding points

نظیری نقطے

Corresponding chords

نظیری وتر

Correspondence

نظیریت

Curve (S)

منحنی - منحنیات

Curve of Section

تراش کا منحنی

Curvilinear Quadrilateral

منحنی زواریعتہ الاضلاع

Cylinder

اسطوانہ

Cylinderoid

اسطوانہ نما

.....

D

Diagonal

قطر

Diameter

قطر - اقطار

Divide harmonically

موسیقی نسبت میں تقسیم کرو

Directrix (ices)

مرتب - مرتبات

Director Circle

مرتب دائرہ

Double Ordinate

دو گنا معین

Drawing pins

نقشہ کشی کی پکھی

Duplicate ratio

نسبت متساۃ

Dimensions

ابعاد

.....

E

Eccentricity

خروج المرکز

Endless String

رسی کا حلقہ

Enunciation

دعویٰ

Ellipse

ہیلیپسی

Elliptical (functions, integrals)

ہیلیپسی (احتمالات - کلیات)

Ellipticity

ہیلیپسیت

Ellipsoid

ہیلیپسی نما

Elliptic section of a cone

مخروط کی ہیلیپسی تراش

Envelope (V.N)

لف کرنا - لفاف

Exterior angle

خارجی زاویہ

External angle

خارجی منصف

External bisector

خارجی منصف

Equi-conjugate (diameters)

مساوی مزدوج اقطار

.....

2

F

Family of a curve

ایک منحنی کا قبیل

Feet (of a perpendicular)

پایوں - پائین (عمود کے)

Focus

ماسکہ

Focal distance

ماسکی فاصلے

Focal Sphere

ماسکی کرہ

.....

G

Generating line

تکونی خط

Generator

مکون

Geometrical Conics

ہندسی مخروطات

.....

H

Harmonic section

موسیقی تقسیم

Hyperbola

قطع زائد ہڈلولی

Hyperbolic

ہڈلولی

Hyperboloid

ہڈلولی نما

Hyperbolic Paraboloid

ہڈلولی سلجی نما

Hyperbolic section

ہڈلولی تراش

Hyperboloid of Revolution

تدویری ہڈلولی نما

.....

I

Image

عکس

Intercept (S)

مقطوعہ

Internal Bisector

داخلی منصف

L

Latus Rectum

وترخاص

Locus

طریق

Linear Dimensions

خطی ابعاد

Linear relation

خطی ارتباط

Limiting points

انتہائی نقطے

M

Major axis

محور اعظم

Maximum (ma)

اعظم - اعظمت

Mean Proportional

وسط تناسب

Minor axis

محور اصغر

Minimum (ma)

اقل - اقلات

Mechanical Construction

بنائیکی آلی ترکیب

Metrical Properties

امتدادی خاصیتیں

N

Normal

عماد

O

Ordinate

Orthogonal Projection

Orthocentre

معتین
قائم الظلیل
مرکز عمودی

P

Problem

Parabola

Parabolic

Paraboloid

Point of contact

Projection (S)

Project

Pole

Polar

Polarity

Parallel Ruler

Principal Axis

Polar Reciprocal

عملیہ
قطع مکانی - شلجی
شلجی -
شلجی بنا
نقطہ تماس
تظلیل ظل - اطلال
تظلیل کرد
قطب
قطبی
قطبیت
متوازی مستطیر
محاور اولیہ
قطبی مکانی

Q

Quadrants

ربعات

.....

R

Radius Vector

نیم قطر سمتی

Radical Axis

اصلی محور

Rider

روایف

Rectangle (contained by Segments)

سطح (سطوح)

Rectangular Hyperbola

قائم بذلولی

Rectilinear

مستقیم

Right Circular Cylinder

قائم مستدیر اسطوانہ

Rotors

دوری دوریات

Roll

لڑھکنا

Revolve

چکر لگانا

Reciprocate

متکافی کرنا

Range

وسعت

.....

S

Scalar (quantities)

میزانی مقداریں

Scalars

درجیات

Semi Latus Rectum

نیم وتر خاص

Semi conjugate diameters

نیم مزدوج قطر

{ Similar and Similarly

شکلاً و وضعاً متشابه

Situated Parabola

Sub-tangent

زیر مماس

Sub-Normal

زیر عماد

Supplementary Chords

مکملی اوتار

Symmetry

تشاکل

Symmetrical

متشاکل

.....

T

Tangent

مماس

Tangent triangle

مماسی مثلث

Tangential

مماسی

Transverse Axis

قاطع محور

Transversal

قاطع

Triads of lines

خطوں کا ثلاثیہ

.....

V

Vertex (ices)

راس (رؤس)

Vector (S)

سمتی - سمتیات

.....

DUE DATE

Rare

Cl. No. 5/13

Acc No. 1626

18FO:1
Late Fine Ordinary books 25 p. per day, Text Book

Re 1 per day, Over night book Re 1 per day.

--	--	--	--

